物理情報数学A - 問題集 (第 2 回)

7. 複素数 z の極座標表示 $z = re^{i\theta}$ を用いて自式を証明せよ.

$$(1)\quad \overline{z_1 z_2} = \bar{z_1}\bar{z_2} \qquad (2)\quad |z_1 z_2| = |z_1||z_2|$$

8. ド・モアブルの公式 $(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$ を用いて, 次の方程式の解 $z \in \mathbf{C}$ を求めよ.

$$(1)\quad z^3 = 1 \qquad (2)\quad z^4 = 1 \qquad (3)\quad z^4 = -1$$

9. 複素関数 $f(z) = z^2$ について, 以下の問いに答えよ.

(1) $f(z)$ に $z = x + iy$ を代入し, x, y に関する 2 変数関数 $f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$ を決定せよ.
(2) 点集合 $\{z = x + iy \mid x = k\}$ (k は定数) は, 複素平面上で虚軸に平行な直線を表す. この直線は, 変換 $f(z)$ によりどのような図形に移るか. (y を動かしたときに, 点 (u, v) がいかなる軌跡を描くかを調べればよい.)
(3) 点集合 $\{z = x + iy \mid y = k\}$ (k は定数) は, 複素平面上で実軸に平行な直線を表す. この直線は, 変換 $f(z)$ によりどのような図形に移るか.

10. 上記演習問題 9 において関数を $f(z) = e^z$ とするときに, 同じ設問 (1),(2),(3) を解答せよ. さらに、$f(z) = \sin(z)$ の場合についても調べてみよ.

11. 複素関数 $f(z) = \sin z = (e^{iz} - e^{-iz})/2i$ について, 以下の問いに答えよ.

(1) $f(z)$ に $z = x + iy$ を代入し, x, y に関する 2 変数関数 $f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$ を決定せよ.
(2) 絶対値 $|\sin z|$ を x, y の関数として表現せよ. $|\sin z| > 1$ となるような z は存在するか.
(3) 2 つの複素数 z_1, z_2 に対して「加法定理」$\sin(z_1 + z_2) = \sin(z_1)\cos(z_2) + \cos(z_1)\sin(z_2)$ を証明せよ.
(4) $\sin z = 0$ となる複素数 $z \in \mathbf{C}$ をすべて求めよ.

12. 複素関数 $f(z) = \cos z = (e^{iz} + e^{-iz})/2$ について, 以下の問いに答えよ.

(1) $f(z)$ に $z = x + iy$ を代入し, x, y に関する 2 変数関数 $f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$ を決定せよ.
(2) 絶対値 $|\cos z|$ を x, y の関数として表現せよ. $|\cos z| > 1$ となるような z は存在するか.
(3) 2 つの複素数 z_1, z_2 に対して「加法定理」$\cos(z_1 + z_2) = \cos(z_1)\cos(z_2) - \sin(z_1)\sin(z_2)$ を証明せよ.
(4) $\cos z = 0$ となる複素数 $z \in \mathbf{C}$ をすべて求めよ.

[補足問題]
(教科書第 1 章) 問 4, 問 5, 問 6, 例題 1.3, 演習問題 1.4