

44. 次の複素関数のすべての特異点における留数を求めよ.

$$(1) f(z) = \frac{z^2}{(z^2 - c^2)^2}, \quad (2) f(z) = \frac{1}{z^3 + 1}, \quad (3) f(z) = \frac{z}{e^z - 1}$$

45. 実変数 x に関する次の定積分を計算したい.

$$I = \int_0^\infty \frac{1}{1+x^4} dx$$

この計算を実行するために, 複素積分

$$\oint_C f(z) dz, \quad f(z) = \frac{1}{1+z^4}$$

を考える. 経路 C は次のものである: 実軸上の点 $-R$ を始点, R を終点とするものを C_1 , 次に R を始点, $-R$ を終点とし複素平面の第1, 2象限を通過する半円を C_2 とする. そして, $C = C_2 C_1$ とする.

- (1) C_2 上の積分が $R \rightarrow \infty$ でゼロに収束することを証明せよ.
- (2) $f(z)$ の特異点で C の内部に含まれるものについて, その留数を求めよ.
- (3) 留数定理より, 積分 I を計算せよ.

46. 実変数 x に関する次の定積分 (フーリエ変換) を計算したい.

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx, \quad f(x) = \frac{a}{x^2 + a^2}$$

ただし ω と $a > 0$ は実数パラメータである. この計算を実行するために, 複素積分

$$\oint_C f(z) e^{-i\omega z} dz, \quad f(z) = \frac{a}{z^2 + a^2}$$

を考える. 経路 C は次のものである: 実軸上の点 $-R$ を始点, R を終点とするものを C_1 , 次に R を始点, $-R$ を終点とし複素平面の第3, 4象限を通過する半円を C_2 とする. そして, $C = C_2 C_1$ とする.

- (1) $\omega > 0$ のとき, C_2 上の積分が $R \rightarrow \infty$ でゼロに収束することを証明せよ.
- (2) コーシーの積分定理より, $\omega > 0$ の場合に定積分 $F(\omega)$ を計算せよ.
- (3) $\omega < 0$ の場合に, 適切な経路を選ぶことで定積分 $F(\omega)$ を計算せよ.

[補足問題]

教科書, 例題 4.25 (p.90), 演習問題 4.5 (p.102), 演習問題 4.6 (p.103)