物理情報数学A - 問題集 (第 9 回)

30. 次のベキ級数の収束半径を求めよ (教科書, 演習 2.1, p.46)

$$(1)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!}z^n \qquad (2)\ \sum_{n=0}^{\infty}2^n z^{2^n} \qquad (3)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\log n}{n}z^n \qquad (4)\ \sum_{n=1}^{\infty}z^{n!}$$

31. 関数 $f(z)=1/(1-z)$ を, 次の点 $z=b\in\mathbf{C}$ まわりでベキ級数展開せよ. また, 収束半径を求めよ.

(1) $b=0$　(2) $b=i$　(3) 一般の $b\in\mathbf{C}$

32. 複素平面上の閉じた経路 $\mathcal{C}$ の内部で, 複素関数 $f(z)$ が正則であるとする. このとき, $\mathcal{C}$ の内部の任意の点 $a\in\mathbf{C}$ について,

$$f(a)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\mathcal{C}}\frac{f(z)}{z-a}dz$$

が成立する. これは, コーシーの積分公式と呼ばれる.

(1) 点 a を中心とする半径 $r>0$ の小円をとり, その周上を正の向きに進む経路を $\mathcal{C}_r$ とする. コーシーの積分定理より,

$$\oint_{\mathcal{C}}\frac{f(z)}{z-a}dz=\oint_{\mathcal{C}_r}\frac{f(z)}{z-a}dz$$

を証明せよ.

(2) $\mathcal{C}_r$ 上の点 $z(t)$ を $z(t)=a+r\mathrm{e}^{it}$ $(t:0\to 2\pi)$ とパラメータ表示することで, 問 (1) 右辺の積分を計算せよ.

(3) 半径 r が任意であることから, コーシーの積分公式を証明せよ.

(4) コーシーの積分公式を利用して, 問 27 の積分を計算せよ.

33. コーシーの積分公式を利用して, 次の複素積分を計算せよ. ただし, $\mathcal{C}$ は複素平面上の原点中心, 半径 2 の円周とする (つまり, $|z|=2$).

$$(1)\ \oint_{\mathcal{C}}\frac{z}{(9-z^2)(z+i)}dz \qquad (2)\ \oint_{\mathcal{C}}\frac{e^z}{z^2-1}dz$$

(ヒント：(1) の場合, $f(z)=z/(9-z^2)$ にコーシーの積分公式を用いる.)

[補足問題]

1. コーシーの積分公式より,

$$\frac{df}{dz}(a)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\mathcal{C}}\frac{f(z)}{(z-a)^2}dz$$

が得られる. これを利用して, 次の複素積分を計算せよ.

$$\oint_{\mathcal{C}}\frac{2}{(z-i)^2(z-1)}dz, \qquad \mathcal{C}:\ |z|=2$$

2. 教科書, 演習問題 4.2 (p.102)