

物理情報数学 A - 問題集 (第 7 回)

27. 複素平面上の円 $|z| = 2a$ (すなわち, $z = x + iy$ とすれば $x^2 + y^2 = 4a^2$) の周上を正の向き (左手系) に進む閉じた経路を C_1 とする. また, 円 $|z - ia| = a$ (すなわち, $z = x + iy$ とすれば $x^2 + (y - a)^2 = a^2$) に対応する閉じた経路を C_2 とする. このとき, 複素関数

$$f(z) = \frac{1}{z^2 + a^2} = \frac{1}{2ia} \left(\frac{1}{z - ia} - \frac{1}{z + ia} \right)$$

に対して次の周回積分を計算せよ.

$$\oint_{C_1} f(z) dz, \quad \oint_{C_2} f(z) dz$$

28. 複素平面上の 4 点 $a + ia, a - ia, -a + ia, -a - ia$ を結ぶ正方形の周上を正の向きに進む閉じた経路を C とする (ただし, $a > 1$). このとき, 次の複素周回積分を計算せよ.

$$\oint_C \frac{|z|^2 - 2\operatorname{Re}(z)}{z - 1} dz$$

ただし, $\operatorname{Re}(z) = (z + \bar{z})/2$ である. (ヒント: 被積分関数を, $\bar{z}$ が現れる項と現れない項に分解する.)

29. 複素平面上の円 $|z| = 2$ の周上を正の向きに進む閉じた経路 C について, 次の複素周回積分を計算したい.

$$\oint_C f(z) dz = \oint_C \frac{2}{(z - i)^2(z - 1)} dz$$

(1) $f(z)$ を次のように分解する.

$$f(z) = \frac{a}{(z - i)^2} + \frac{b}{(z - i)} + \frac{c}{z - 1} + d$$

係数 a, b, c, d を決定せよ. (ヒント: 例えば, 上式の両辺に $z - 1$ を掛けてみよ.)

(2) 問題の複素周回積分を計算せよ.

[補足問題]

教科書, 第 3 章 問 6 (p.69), 演習問題 3.2 (p.72)