物理情報数学A - 問題集 (第 6 回)

25. 実 x, y 平面上に円弧 $x^2+y^2=1 \ \ (y \geq 0)$ をとり, その上の点 $(1,0)$ を始点, $(-1,0)$ を終点とする経路 $\mathcal{C}$ を考える. このとき, 次の線積分を計算せよ.

$$(1) \quad \int_{\mathcal{C}} dx, \quad \int_{\mathcal{C}} dy \qquad (2) \quad \int_{\mathcal{C}} x dx, \quad \int_{\mathcal{C}} x dy$$

26. 複素関数 $f(z)=\bar{z}=x-iy$ を閉じた経路 $\mathcal{C}$ に沿って周回積分する. コーシーの積分定理を証明する際の式変形を利用して,

$$\oint_{\mathcal{C}} \bar{z} dz = 2i \int_{\mathcal{D}} dxdy = 2i(\mathcal{D}\text{ の面積}) \tag{1}$$

を証明せよ. ただし, $\mathcal{D}$ は閉じた経路 $\mathcal{C}$ の内部の領域である.

[**補足問題**]

1. $\mathcal{C}$ を, 原点 $z=0$ から出発して, $z=a, z=a+bi$ をこの順番で経由して原点 $z=0$ に戻る直角三角形型の閉じた経路とする. このとき, コーシーの積分定理および上の公式 (1) を利用して, 次の周回積分を計算せよ.

$$(1) \quad \oint_{\mathcal{C}} z dz \qquad (2) \quad \oint_{\mathcal{C}} \bar{z} dz$$

2. 複素平面上で原点中心, 半径 r の円周をとる. そして, $z=r$ から出発して, 反時計回りにこの円周に沿って $z=r$ に戻る閉じた経路を $\mathcal{C}$ とする. このとき, 前問 1 と同じ周回積分を計算せよ. 前問と同様, コーシーの積分定理および上の公式 (1) を利用してよい.

3. 前問 2 で $r=1$ とした経路を $\mathcal{C}$ とするとき, 次の周回積分を計算せよ. コーシーの積分定理を利用してよい.

$$(1) \quad \oint_{\mathcal{C}} \frac{1}{z} dz \qquad (2) \quad \oint_{\mathcal{C}} \frac{1}{z-2} dz$$