19. 次の経路 $\mathcal{C}$ について複素積分 $\int_{\mathcal{C}} z dz$ を計算せよ．いずれの場合も，$z=0$ が始点，$z=a+bi$ が終点である．

(1) $\mathcal{C}_1$: 原点 $z=0$ と $z=a+bi$ を結ぶ直線 (a,b は実数である．以下同様)．

(2) $\mathcal{C}_2$: 原点 $z=0$ と $z=a+bi$ を結ぶ曲線 $y=bx^2/a^2$．ただし，複素平面の実軸座標を x，虚軸座標を y とした．

(3) $\mathcal{C}_3$: 原点 $z=0, z=a, z=a+bi$ をこの順番で結ぶ折れ線．

20. 前問 19 と同じ設定で複素積分 $\int_{\mathcal{C}} \bar{z} dz$ を計算せよ．

21. $\mathcal{C}$ を，原点 $z=0$ から出発して，$z=a, z=a+bi$ をこの順番で経由して原点 $z=0$ に戻る直角三角形型の閉じた経路とする．このとき，次の周回積分を計算せよ (参考：教科書，例題 3.17)．

$$(1)\quad \oint_{\mathcal{C}} z dz \qquad (2)\quad \oint_{\mathcal{C}} \bar{z} dz$$

22. 複素平面上で原点中心，半径 r の円周をとる．そして，$z=r$ から出発して，反時計回りにこの円周に沿って $z=r$ に戻る閉じた経路を $\mathcal{C}$ とする．このとき，前問 21 と同じ周回積分を計算せよ (参考：教科書，例題 3.17)．

23. 前問 22 で $r=1$ とした経路を $\mathcal{C}$ とするとき，次の周回積分を計算せよ．

$$(1)\quad \oint_{\mathcal{C}} \frac{1}{z} dz \qquad (2)\quad \oint_{\mathcal{C}} \frac{1}{z-2} dz$$

24. 経路 $\mathcal{C}: z(t)\ (t: t_1 \to t_2)$ に沿う複素積分 $\int_{\mathcal{C}} f(z) dz$ を考える (参考：教科書，命題 3.14)．

(1) 経路 $\mathcal{C}$ 上で $|f(z(t))| \leq M$ (M は正の定数) がつねに成り立つとき，

$$\left| \int_{\mathcal{C}} f(z) dz \right| \leq ML$$

を証明せよ．ただし L は経路 $\mathcal{C}$ の長さである：

$$L = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\left(\frac{dx(t)}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy(t)}{dt}\right)^2} dt$$

(2) $\mathcal{C}$ を問題 22 の円周，$f(z) = 1/(z^2+a^2)$ (ただし $a<r$) とするとき，次の不等式を証明せよ．

$$\left| \oint_{\mathcal{C}} f(z) dz \right| \leq \frac{2\pi r}{r^2-a^2}$$