

13. 複素関数の微分の定義に基づいて, 以下の関数の微分可能性を判定せよ.

$$(1) \quad f(z) = \bar{z} \quad (2) \quad f(z) = \bar{z}^2 \quad (3) \quad f(z) = e^z$$

14. コーシー・リーマンの関係式を用いて, 以下の関数の微分可能性を判定せよ. また, 微分可能であるときはその関数形を求めよ.

$$(1) \quad f(z) = z^2 \quad (2) \quad f(z) = \bar{z}^2 \quad (3) \quad f(z) = e^z$$

15. (1) コーシー・リーマンの関係式を用いることで, 複素関数 e^{iz} が微分可能であることを証明せよ. またこのとき, 微分の関数形を求めよ. さらに, 複素関数 e^{-iz} についても確認せよ.
(2) 設問 (1) より, 複素関数 $\sin z = (e^{iz} - e^{-iz})/2i$ および $\cos z = (e^{iz} + e^{-iz})/2$ は微分可能である.

$$\frac{d}{dz} \sin z = \cos z, \quad \frac{d}{dz} \cos z = -\sin z$$

であることを証明せよ.

16. 複素関数 $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ が (複素平面上のある領域で) 微分可能であるとする. このとき, u, v が次の偏微分方程式を満たすことを示せ (教科書: 第 3 章, 問 3).

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$$

17. (1) 複素関数 $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ が複素平面上の全領域で微分可能で, かつ実部が $u(x, y) = x^2 - y^2$ で与えられるものとする. このとき, 虚部 $v(x, y)$ の関数形を決定せよ.
(2) 複素関数 $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ が複素平面上の全領域で微分可能で, かつ実部が $u(x, y) = x^n$ で与えられるものとする (n は整数). このとき, 整数 n を特定し, 虚部 $v(x, y)$ の関数形を決定せよ (教科書: 第 3 章, 問 4).

18. 複素関数 $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ が複素平面上の全領域で微分可能で, かつ絶対値が定数であるとする: $|f|^2 = u^2 + v^2 = K \geq 0$. (教科書: 例 3.10 で別解提示).

(1) コーシー・リーマンの関係式を用いることで, 関数 u が次の行列方程式を満たすことを示せ (ヒント: $u^2 + v^2 = K$ の両辺を x または y で偏微分してみよ).

$$\begin{bmatrix} u & -v \\ v & u \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} \end{bmatrix} = 0$$

(2) $f(z)$ は定数関数であることを証明せよ.

[補足問題]

(教科書第 3 章) 例題 3.9, 問 5, 演習問題 3.1