

物理情報数学 A - 問題集 (第 1 回)

1. (1) 複素数 z とその共役複素数 $\bar{z}$ に対して, $|z| = |\bar{z}|$ を証明せよ.

(2) 2 つの複素数 z_1, z_2 に対して,

$$\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$$

を証明せよ. ただし, 公式 $|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|$, $|z|^2 = z \bar{z}$ を用いて良い.

2. 2 つの複素数 α, β が $|\alpha| < 1, |\beta| < 1$ を満たすとき, 次の不等式を証明せよ.

$$\left| \frac{\alpha - \beta}{1 - \bar{\alpha}\beta} \right| < 1$$

3. (1) 複素数 z が $|z| \leq 1$ を満たすとき, $z + \bar{z} \leq 2$ を証明せよ.

(2) 2 つの複素数 z_1, z_2 に対して, 次の「三角不等式」が成立することを証明せよ.

$$|z_1 - z_2| \leq |z_1| + |z_2|$$

4. 2 つの複素数 z_1, z_2 に対して, $z_1 + z_2$ は複素平面上で, いかなる点に対応するか. また, $z_1 - z_2$ はどうか. このことを基に, 問 2 の三角不等式の図形的な意味を考えてみよ.

5. つぎの複素数に対して, それぞれの極形式 $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ を求めよ.

$$(1) \ z = \sqrt{3} + i \quad (2) \ z = -1 + \sqrt{3}i \quad (3) \ z = i$$

6. $z_1 = \cos \theta_1 + i \sin \theta_1$, $z_2 = \cos \theta_2 + i \sin \theta_2$ に対して z_1/z_2 を計算して, 「 $\cos \theta + i \sin \theta$ で割る」ことの図形的な意味を考えてみよ.

[補足問題]

(教科書第 1 章) 問 1, 問 2, 例題 1.4, 演習問題 1.1, 演習問題 1.2, 演習問題 1.3, 演習問題 1.6

解答は下記にて公開:

<http://www.yamamoto.appi.keio.ac.jp/lec.html>