物理情報数学A － 問題解答.

7. (1) $z_1 = r_1 e^{i\theta_1}$, $z_2 = r_2 e^{i\theta_2}$ とおくと, $z_1 z_2 = r_1 e^{i\theta_1} \cdot r_2 e^{i\theta_2} = r_1 r_2 e^{i(\theta_1+\theta_2)}$ なので,

$\overline{z_1 z_2} = r_1 r_2 e^{-i(\theta_1+\theta_2)} = r_1 e^{-i\theta_1} r_2 e^{-i\theta_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$

(2) $|z_1 z_2| = |r_1 r_2 e^{i(\theta_1+\theta_2)}| = r_1 r_2 = |z_1| \cdot |z_2|$ $\left(z = re^{i\theta} \text{ に対して, } |z| = r \right)$

8. (1) $z^3 = 1$ の共役をとると, $\overline{z}^3 = 1$. これらをかけると $(z\overline{z})^3 = 1$.

一方, $z\overline{z} = |z|^2$ より, $|z|^6 = 1$. $|z| \geqq 0$ なので, $|z| = 1$.

ゆえに, $z = \cos\theta + i\sin\theta$ とおいてよい. これを $z^3 = 1$ に代入すると,

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^3 = 1 \iff \cos(3\theta) + i\sin(3\theta) = 1.$$

ゆえに $\cos(3\theta) = 1$, $\sin(3\theta) = 0$. $\therefore$ $3\theta = 0, 2\pi, 4\pi$. i.e., $\theta = 0, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$.

つまり, 解は $z_1 = 1$, $z_2 = e^{i\frac{2\pi}{3}}$, $z_3 = e^{i\frac{4\pi}{3}}$ の3つ. (下図)

(2) (1)と同様に $z = \cos\theta + i\sin\theta$ とおけば, ゆえに $\cos(4\theta) = 1$, $\sin(4\theta) = 0$.

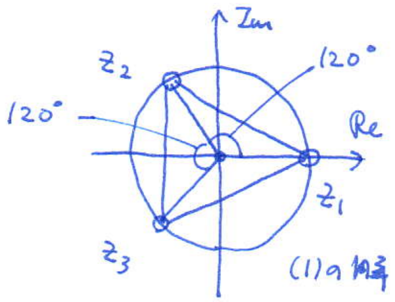
$\therefore$ $4\theta = 0, 2\pi, 4\pi, 6\pi$ より $\theta = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$.

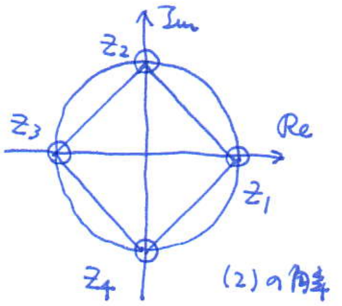
ゆえに解は $z_1 = 1$, $z_2 = e^{i\frac{\pi}{2}}$, $z_3 = e^{i\pi}$, $z_4 = e^{i\frac{3\pi}{2}}$ の4つ. (下図)

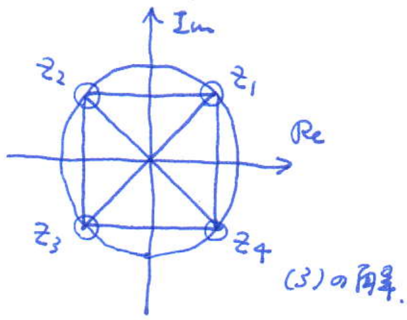
(3) $z = \cos\theta + i\sin\theta$ とおけば, ゆえに $\cos(4\theta) = -1$, $\sin(4\theta) = 0$.

$\therefore$ $4\theta = \pi, 3\pi, 5\pi, 7\pi$. i.e., $\theta = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$

ゆえに解は $z_1 = e^{i\frac{\pi}{4}}$, $z_2 = e^{i\frac{3\pi}{4}}$, $z_3 = e^{i\frac{5\pi}{4}}$, $z_4 = e^{i\frac{7\pi}{4}}$ の4つ. (下図)







9. (1) $f(z) = f(x+iy) = (x+iy)^2 = x^2 + 2ixy - y^2 = (x^2-y^2) + i(2xy)$

$\therefore u(x,y) = x^2 - y^2, \quad v(x,y) = 2xy$

(2) $x = k$ のとき、 $u = k^2 - y^2, \quad v = 2ky$

とくに $k=0$ のとき、 $u = -y^2, \ v = 0$ より、これは実軸の $u \leqq 0$ の部分（半直線）

$k \neq 0$ のとき、 $y = \dfrac{v}{2k}$ より、 $u = k^2 - \dfrac{v^2}{4k^2}$

これは 2次関数. kを色々変えてできる軌跡は 下図.

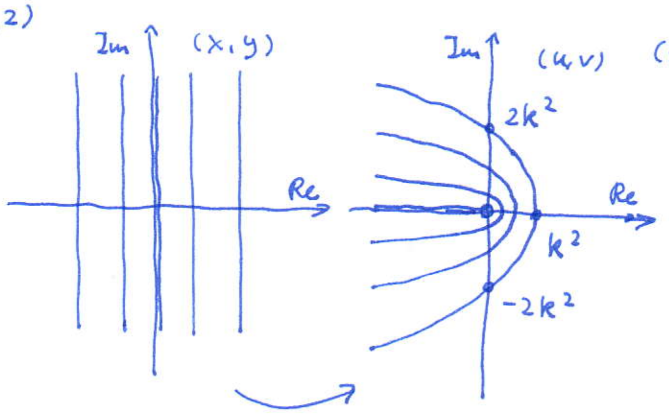
2本の直線 $x = \pm k$ が 1本の2次関数に対応. つまり 写像は1対1ではない.

(3) $y = k$ のとき $u = x^2 - k^2, \ v = 2kx$.

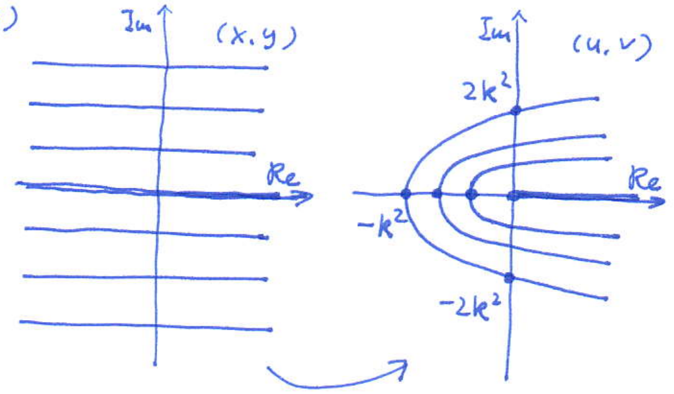
$k=0$ とすると $u = x^2, \ v = 0$ より これは実軸の $u \geqq 0$ の部分（半直線）

$k \neq 0$ のとき、 $x = \dfrac{v}{2k}$ より、 $u = \dfrac{v^2}{4k^2} - k^2$

(2)



(3)



10. (1) $f(z) = f(x+iy) = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \sin y)$

$\therefore u(x,y) = e^x \cos y, \quad v(x,y) = e^x \sin y$

1対1.

(2) $x = k$ のとき、 $u = e^k \cos y, \ v = e^k \sin y \quad \therefore u^2 + v^2 = e^{2k}$ （円）

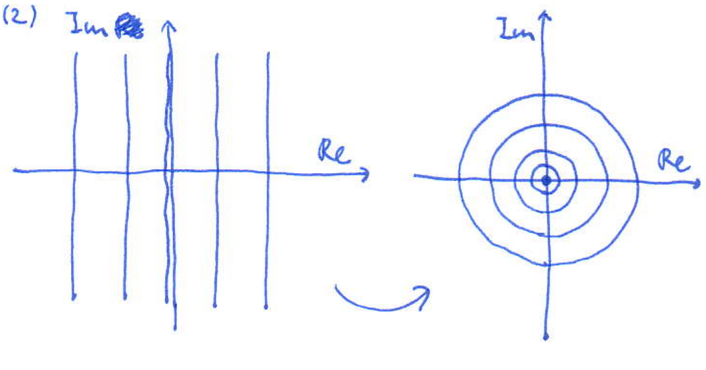
(3) $y = k$ のとき、 $u = e^x \cos k, \ v = e^x \sin k$

1対1ではない.

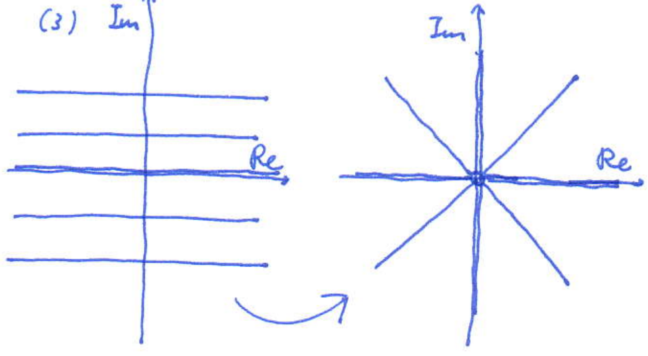
$\cos k \neq 0$ のとき、 $\dfrac{v}{u} = \dfrac{e^x \sin k}{e^x \cos k} = (\tan k) \quad \therefore v = (\tan k)u$ （半直線）.

とくに $\cos k > 0$ であれば $u > 0$ での半直線、 $\cos k < 0$ であれば $u < 0$ での半直線.

(2)



(3)



11. (1) $f(z)=f(x+iy)=\dfrac{e^{i(x+iy)}-e^{-i(x+iy)}}{2i}=\dfrac{e^{ix}e^{-y}-e^{-ix}e^{y}}{2i}$

$$=\frac{1}{2i}e^{-y}(\cos x+i\sin x)-\frac{1}{2i}e^{y}(\cos x-i\sin x)$$

$$=\frac{e^{-y}\cos x-e^{y}\cos x}{2i}+\frac{e^{-y}\sin x+e^{y}\sin x}{2}$$

$$=\frac{-ie^{-y}\cos x+ie^{y}\cos x}{2}+\frac{e^{-y}\sin x+e^{y}\sin x}{2}$$ （第1項：分子,分母に $-i$ をかけた）

$\therefore\ u(x,y)=\dfrac{e^{y}+e^{-y}}{2}\sin x,\quad v(x,y)=\dfrac{e^{y}-e^{-y}}{2}\cos x$

(2) $|\sin z|^2=u^2+v^2=\dfrac{e^{2y}+2+e^{-2y}}{4}\sin^2 x+\dfrac{e^{2y}-2+e^{-2y}}{4}\cos^2 x$

$$=\frac{e^{2y}+e^{-2y}}{4}(\sin^2 x+\cos^2 x)+\frac{1}{2}(\sin^2 x-\cos^2 x)$$

$$=\frac{e^{2y}+e^{-2y}}{4}+\frac{2\sin^2 x-1}{2}=\sin^2 x+\frac{e^{2y}-2+e^{-2y}}{4}=\sin^2 x+\left(\frac{e^{y}-e^{-y}}{2}\right)^2$$

ゆえに, 例えば $x=\frac{\pi}{2}$, $y=1$ とすれば. $\left|\sin\left(\frac{\pi}{2}+i\right)\right|^2=1+\left(\frac{e-e^{-1}}{2}\right)^2>1$.

(3) $\sin(z_1+z_2)=\dfrac{e^{i(z_1+z_2)}-e^{-i(z_1+z_2)}}{2i}=\dfrac{1}{2i}\left(e^{iz_1}e^{iz_2}-e^{-iz_1}e^{-iz_2}\right)$

$$=\frac{1}{2i}\left\{(\cos z_1+i\sin z_1)(\cos z_2+i\sin z_2)-(\cos z_1-i\sin z_1)(\cos z_2-i\sin z_2)\right\}$$

$$=\frac{1}{2i}\Big(\cos z_1\cdot\cos z_2+i\cos z_1\cdot\sin z_2+i\sin z_1\cdot\cos z_2-\sin z_1\cdot\sin z_2$$
$$-\cos z_1\cdot\cos z_2+i\cos z_1\cdot\sin z_2+i\sin z_1\cdot\cos z_2+\sin z_1\cdot\sin z_2\Big)$$

$$=\cos z_1\cdot\sin z_2+\sin z_1\cdot\cos z_2$$

(4) 一般に, $a+bi=0 \iff a=0,\ b=0$

ゆえに, $\sin z=\dfrac{e^{y}+e^{-y}}{2}\sin x+i\dfrac{e^{y}-e^{-y}}{2}\cos x=0 \iff \begin{cases}\dfrac{e^{y}+e^{-y}}{2}\sin x=0\\[2mm] \dfrac{e^{y}-e^{-y}}{2}\cos x=0.\end{cases}$

第1式に注目する. まず $e^{y}+e^{-y}>0$ より, $\sin x=0$.

また, このとき $\cos x\neq 0$ より, 第2式より $e^{y}-e^{-y}=0 \iff e^{2y}=1 \quad \therefore\ y=0$.

ゆえに, $\sin z=0$ となる $z=x+iy$ は,

$$(x,y)=\cdots,(-2\pi,0),(-\pi,0),(0,0),(\pi,0),(2\pi,0),\cdots$$

つまり, 実数方程式 $\sin x=0$ の場合と同じ.

12. (1) $u=\dfrac{e^{y}+e^{-y}}{2}\cos x$, $v=\dfrac{e^{-y}-e^{y}}{2}\sin x$ (2) $|\cos z|^2=\cos^2 x+\left(\dfrac{e^{y}-e^{-y}}{2}\right)^2$

(3) 略. (4) $\cos x=0$, $y=0$ となる (x,y).