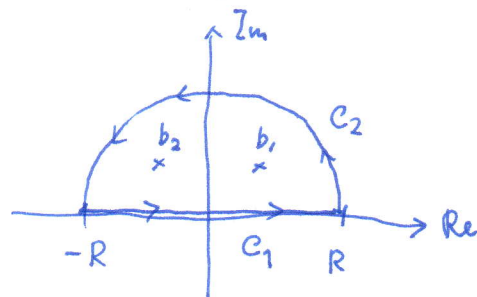


45.

- (1) C_2 上の動点 $z(t)$ は, $z(t) = Re^{it}$
 $(t: 0 \rightarrow \pi)$ と表わす.



$$\left| \int_{C_2} f(z) dz \right| = \left| \int_0^\pi \frac{Re^{it}}{1 + R^2 e^{4it}} dt \right|$$

$$\leq \int_0^\pi \left| \frac{Re^{it}}{1 + R^2 e^{4it}} \right| dt = \int_0^\pi \frac{R}{|1 + R^2 e^{4it}|} dt$$

これは明らかに $R \rightarrow \infty$ として 0 となる。 $\int_{C_2} f(z) dz \rightarrow 0 \quad (R \rightarrow +\infty)$.

- (2) $1 + z^4 = 0$ とする点を求める。つまり $z^4 = -1$ の解の値を求め、 $|z| = 1$.
 z に $z = e^{i\theta}$ とおくと、 $e^{4i\theta} = -1 = e^{\pi i}, e^{-\pi i}, e^{3\pi i}, e^{-3\pi i}, \dots$
 $\therefore \theta = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$ となる。 z に $C = C_2 C_1$ の周りを 1 周する
 $b_1 = e^{\frac{\pi}{4}i}, b_2 = e^{\frac{3\pi}{4}i}$ とする (また $b_3 = e^{\frac{5\pi}{4}i}, b_4 = e^{\frac{7\pi}{4}i}$ とする.)

よって, $f(z) = \frac{1}{(z-b_1)(z-b_2)(z-b_3)(z-b_4)}$ と表わす。

$$\begin{aligned} b_3 &= -b_1 \\ b_4 &= -b_2 \end{aligned}$$

$$\text{Res}(b_1; f) = (z-b_1) f(z) \Big|_{z=b_1} = \frac{1}{(b_1-b_2)(b_1-b_3)(b_1-b_4)} = \frac{1}{2b_1(b_1-b_2)(b_1+b_2)}$$

$$\text{Res}(b_2; f) = (z-b_2) f(z) \Big|_{z=b_2} = \frac{1}{(b_2-b_1)(b_2-b_3)(b_2-b_4)} = \frac{-1}{2b_2(b_1-b_2)(b_1+b_2)}$$

- (3) 留数定理より, $\oint_C f(z) dz = 2\pi i [\text{Res}(b_1; f) + \text{Res}(b_2; f)]$

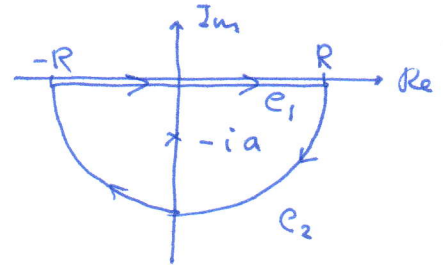
$$= 2\pi i \cdot \frac{b_2 - b_1}{2b_1 b_2 (b_1 - b_2)(b_1 + b_2)} = \frac{-\pi i}{b_1 b_2 (b_1 + b_2)} = \frac{-\pi i}{e^{\pi i} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}} + \frac{-1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}} \right)}$$

$$= \frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

ゆえに $\oint_C f(z) dz = \int_{C_1} f(z) dz + \int_{C_2} f(z) dz \xrightarrow{(R \rightarrow +\infty)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^4} dx$

$$\therefore I = \int_0^{\infty} \frac{1}{1+x^4} dx = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$$

46.



- (1) C_2 上の動点 $z(t) = Re^{it}$
($t: 0 \rightarrow -\pi$) を表す。

$$\therefore \left| \int_{C_2} f(z) e^{-i\omega z} dz \right|$$

$$= \left| \int_0^{-\pi} \frac{a}{R^2 e^{2it} + a^2} e^{-i\omega R(\cos t + i \sin t)} \cdot i R e^{it} dt \right|$$

$$\leq \int_{-\pi}^0 \frac{a \cdot |e^{-i\omega R \cos t} \cdot e^{\omega R \sin t}| \cdot R}{|R^2 e^{2it} + a^2|} dt$$

$$= \int_{-\pi}^0 \frac{a R e^{\omega R \sin t}}{|R^2 e^{2it} + a^2|} dt$$

240! C_2 を実軸の下に
とる理由。

222!! $-\pi \leq t \leq 0$, $\omega > 0$ より $\omega R \sin t \leq 0$ より $e^{\omega R \sin t} \leq 1$.

$$\therefore \left| \int_{C_2} f(z) e^{-i\omega z} dz \right| \leq \int_{-\pi}^0 \frac{a R}{|R^2 e^{2it} + a^2|} dt \rightarrow 0 \quad (R \rightarrow +\infty)$$

- (2) $f(z) e^{-i\omega z}$ は $z = -ia$ の唯一の特異点である。

$$\therefore \oint_{C^{-1}} f(z) e^{-i\omega z} dz = 2\pi i \operatorname{Res}(-ia; f(z) e^{-i\omega z})$$

(注意! コーシの定理では
閉曲線は正の向きで取定する。)

$$f(z) = \frac{a}{(z+ia)(z-ia)}$$

$$= 2\pi i \cdot (z+ia) f(z) e^{-i\omega z} \Big|_{z=-ia}$$

$$= 2\pi i \cdot \frac{a}{-2ia} \cdot e^{-a\omega} = -e^{-a\omega} \cdot \pi$$

$$\text{よって, } \oint_{C_a} f(z) e^{-i\omega z} dz = \int_{C_1} f(z) e^{-i\omega z} dz + \int_{C_2} f(z) e^{-i\omega z} dz$$

$$\rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx$$

($R \rightarrow +\infty$)

$\therefore R \rightarrow +\infty$ である。

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx = \oint_C f(z) e^{-i\omega z} dz = - \oint_{C^{-1}} f(z) e^{-i\omega z} dz$$

$$= \pi e^{-a\omega}$$

(3) : 107.