39.

問35の結果より、$f(z)$を$z=2$中心、領域$0<|z-2|<1$でローラン展開すると、

$$f(z)=\frac{2}{z-2}-\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(z-2)^n$$

となる。ゆえに、$\mathrm{Res}(2;f)=2$

一方、$z=1$中心、領域$0<|z-1|<1$で展開すると、

$$\frac{2}{z-2}=\frac{2}{(z-1)-1}=\frac{-2}{1-(z-1)}=-2\sum_{n=0}^{\infty}(z-1)^n$$

$$\therefore\ f(z)=\frac{-1}{z-1}+\frac{2}{z-2}=\frac{-1}{z-1}-2\sum_{n=0}^{\infty}(z-1)^n$$

ゆえに、$\mathrm{Res}(1;f)=-1$。

いま、円$|z|=3$の内部に$f(z)$の特異点$z=1,2$が含まれるので、留数定理より、

$$\oint_{|z|=3}f(z)dz=2\pi i\left[\mathrm{Res}(1;f)+\mathrm{Res}(2;f)\right]=2\pi i(2-1)=2\pi i$$

40.

$$f(z)=\frac{1}{z}+\frac{-2}{z-1}+\frac{1}{z-2}$$ と分解できる。

まず、中心0、領域$0<|z|<1$でのローラン展開は、問36より

$$f(z)=\frac{1}{z}+\sum_{n=0}^{\infty}\left(2-\frac{1}{2^{n+1}}\right)z^n$$

で与えられる。ゆえに、$\mathrm{Res}(0;f)=1$。

次に、中心$z=1$、領域$0<|z-1|<1$でローラン展開すると、次のようになる：

$$f(z)=\frac{1}{(z-1)+1}+\frac{-2}{z-1}+\frac{1}{(z-1)-1}$$

$$=\frac{1}{1-\left(\frac{z-1}{-1}\right)}+\frac{-2}{z-1}+\frac{-1}{1-(z-1)}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-1}{-1}\right)^n+\frac{-2}{z-1}-\sum_{n=0}^{\infty}(z-1)^n\qquad(\because |z-1|<1)$$

$$=\frac{-2}{z-1}+\sum_{n=0}^{\infty}\left((-1)^n-1\right)(z-1)^n$$ ゆえに、$\mathrm{Res}(1;f)=-2$

円$|z|=1.5$の内部にある特異点は$z=0$, $z=1$なので、

$$\oint_{|z|=1.5}f(z)dz=2\pi i\left[\mathrm{Res}(0;f)+\mathrm{Res}(1;f)\right]=-2\pi i$$

41. $f(z) = \dfrac{1}{2i}\left(\dfrac{1}{z-i} - \dfrac{1}{z+i}\right)$ と分解できる.

まず, 問37の結果より, 中心 $z=i$, 領域 $0<|z-i|<2$ での $f(z)$ のローラン展開は

$$f(z) = \frac{1}{2i}\cdot\frac{1}{z-i} - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(-2i)^{n+2}}(z-i)^n$$

で与えられるので, $\mathrm{Res}(i;f) = \dfrac{1}{2i}$. 次に, 中心 $z=-i$, 領域 $0<|z+i|<2$ でのローラン展開を考える. すると,

$$\frac{1}{z-i} = \frac{1}{(z+i)-2i} = \frac{-1}{2i-(z+i)} = \frac{-\frac{1}{2i}}{1-\left(\frac{z+i}{2i}\right)}$$

$$= -\frac{1}{2i}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z+i}{2i}\right)^n$$

$$\therefore\ f(z) = \frac{-1}{2i}\cdot\frac{1}{z+i} - \frac{1}{2i}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2i)^n}(z+i)^n \qquad \therefore\ \mathrm{Res}(-i;f) = \frac{-1}{2i}$$

円 $|z|=2$ の内部に特異点 $z=\pm i$ が含まれるので, 留数定理より,

$$\oint_{|z|=2} f(z)\,dz = 2\pi i\left[\mathrm{Res}(i;f) + \mathrm{Res}(-i;f)\right] = 0.$$

42. 問38の結果より, $f(z)$ を $z=0$ 付近でローラン展開すると,

$$f(z) = \frac{1}{z^3} - \frac{1}{3z} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

の形になる. ゆえに, $\mathrm{Res}(0;f) = -\dfrac{1}{3}$. いま, $f(z)$ の特異点は $0, \pm\pi, \pm 2\pi, \cdots$ なので, 円 $|z|=1$ の内部に含まれる特異点は $z=0$ のみである. ゆえに留数定理より,

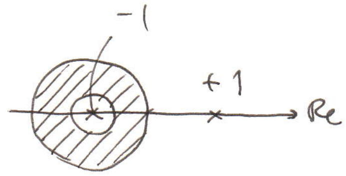
$$\oint_{|z|=1} f(z)\,dz = 2\pi i\,\mathrm{Res}(0;f) = -\frac{2\pi i}{3}$$

43.

(1) $f(z) = \frac{1}{z+1} + \frac{1}{z-1}$

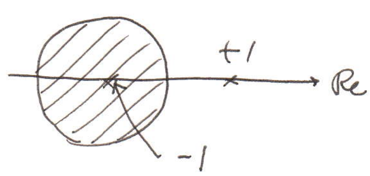
(i) $z=-1$ における留数 $Res(-1;f)$ は、$z=-1$ まわりのドーナツ型小領域

における ローラン展開の $(z+1)^{-1}$ の係数。



ここで、$\frac{1}{z-1}$ の項にとっては、この領域は、

内部をすべて含めても正則。つまり、$\frac{1}{z-1}$ は



$z=-1$ まわりの小円板内でテーラー展開可能。

すなわち、$\frac{1}{z-1} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z+1)^n$.

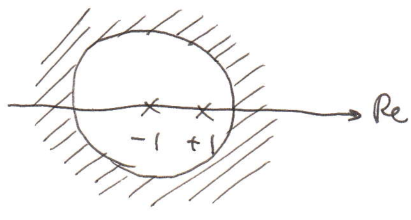
ゆえに、$f(z) = \frac{1}{z+1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z+1)^n$ となるので、$Res(-1;f) = 1$.

(ii) 同様に、$z=1$ まわりの小円板内で $\frac{1}{z+1}$ は正則で、テーラー展開可。

つまり、$f(z) = \frac{1}{z-1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-1)^n$ の形。 ∴ $Res(+1;f) = 1$

(2) 留数定理より、$\oint_C f(z)\,dz = 2\pi i \{ Res(-1;f) + Res(+1;f) \} = 4\pi i$

(3) $\frac{1}{z+1}$ はすでにローラン展開の形になっているので、$\frac{1}{z-1}$ を



展開する。(1)の場合と異なり、いま、$\frac{1}{z-1}$ は $z=-1$

まわり の右図の領域 で テーラー展開できない。

$$\frac{1}{z-1} = \frac{1}{(z+1)-2} = \frac{\frac{1}{z+1}}{1-\left(\frac{2}{z+1}\right)} = \frac{1}{z+1} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{z+1}\right)^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} 2^n \cdot \frac{1}{(z+1)^{n+1}}$$

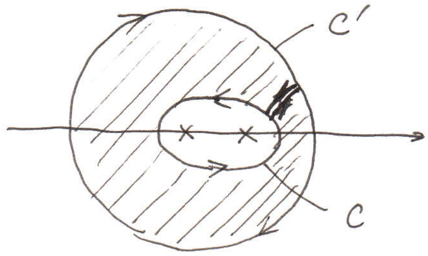
(∵) $\left|\frac{2}{z+1}\right| = \frac{2}{|z+1|} < 1$ より。

$$\therefore\ f(z) = \frac{1}{z+1} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{(z+1)^{n+1}} = \frac{2}{z+1} + \sum_{n=1}^{\infty} 2^n \cdot \frac{1}{(z+1)^{n+1}}$$

複数の特異点を内部の中空部分に含む領域で考えているので、$\frac{1}{(z+1)}$ の係数 $= 2$ は

留数とは言われないことに注意。

いま、$z=-1$ を中心とする十分大きな円 C' を考えると、



C と C' の内部の領域で $f(z)$ は正則。ゆえにコーシーの定理より $\oint_C f dz + \oint_{C'} f dz = 0$.

$$\therefore \oint_C f(z) dz = -\oint_{C'} f dz = \oint_{C'^{-1}} f dz$$

一方、この領域において $f(z)$ は $f(z) = \dfrac{2}{z+1} + \sum_{n=1}^{\infty} 2^n \dfrac{1}{(z+1)^{n+1}}$ とローラン展開できる。

ゆえに、

$$\oint_C f dz = \oint_{C'^{-1}} \left[\frac{2}{z+1} + \sum_{n=1}^{\infty} 2^n \frac{1}{(z+1)^{n+1}} \right] dz = 2\oint_{C'^{-1}} (z+1)^{-1} dz = 4\pi i.$$

ここで、中心 a、半径 r の任意の円 $\bar{C}$ について $\oint_{\bar{C}} (z-a)^n dz = \begin{cases} 2\pi i & (n=-1) \\ 0 & (n \neq -1) \end{cases}$ を用いた。

44.

(1) $f(z) = \dfrac{z^2}{(z-c)^2(z+c)^2} = \dfrac{\boxtimes}{(z-c)^2} + \cdots$ の形に書けるはず。

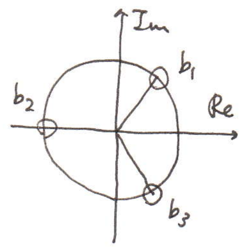
$$\therefore \mathrm{Res}(c; f) = \frac{d}{dz}(z-c)^2 f(z)\Big|_{z=c} = \frac{d}{dz}\frac{z^2}{(z-c)^2}\Big|_{z=c}$$

$$= -2(1+cz^{-1})^{-3}(-cz^{-2})\Big|_{z=c} = \frac{1}{4c}$$

同様に、$\mathrm{Res}(-c; f) = -\dfrac{1}{4c}$

(2) $z^3+1=0$ となる z は $z = e^{i\theta}$ とおけば $\theta = \dfrac{\pi}{3}, \pi, \dfrac{5}{3}\pi$ より

$b_1 = e^{i\pi/3}$, $b_2 = e^{i\pi}$, $b_3 = e^{5i\pi/3}$



$\rightarrow$ $f(z) = \dfrac{1}{(z-b_1)(z-b_2)(z-b_3)} = \dfrac{\boxtimes}{z-b_1} + \cdots$ の形に書けるはず。

$$\therefore \mathrm{Res}(b_1; f) = (z-b_1)f(z)\Big|_{z=b_1} = \frac{1}{(b_1-b_2)(b_1-b_3)} = \frac{-1-\sqrt{3}i}{6}$$

他も同様。

↙両辺の絶対値をとれば $e^x = 1$. $\therefore x=0$

(3) $e^z - 1 = 0$ となる z は、$z = x+iy$ とおけば $e^x(\cos y + i\sin y) = 1$. より $y = 2n\pi$

$\therefore z = 2n\pi i$.

$w = z - 2n\pi i$ とおいて $w=0$ まわりでローラン展開する:

$$f(z) = f(w) = \frac{w+2n\pi i}{e^{w+2n\pi i}-1} = \frac{w+2n\pi i}{e^w - 1} = \frac{w+2n\pi i}{w\left(1+\frac{w}{2!}+\frac{w^2}{3!}+\cdots\right)}$$

$$= \frac{w+2n\pi i}{w} \sum_{m=0}^{\infty}\left(-\frac{w}{2!}-\frac{w^2}{3!}-\cdots\right)^m = \left(1+\frac{2n\pi i}{w}\right)\left(1-\frac{w}{2!}-\frac{w^2}{3!}-\cdots\right)$$

$$\therefore \mathrm{Res}(2n\pi i; f) = 2n\pi i$$