物理情報数学A－問題解答

30.

(1) $a_n = \dfrac{(n!)^2}{(2n)!}$ より. $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \lim_{n\to\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!}\cdot\frac{(2n+2)!}{[(n+1)!]^2}$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!}\cdot\frac{(2n+2)(2n+1)(2n)!}{(n+1)^2(n!)^2} = 4. \qquad \underline{\therefore\ r=4}$$

(2) $f(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} 2^n z^{2^n} = 1 + 2z^2 + 4z^4 + 8z^8 + \cdots$

ゆえに、nが2の階乗のとき、$a_n = n$、そうでないとき、$a_n = 0$.

$$\therefore\ \overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n} = 1 \qquad \underline{\therefore\ r=1}$$

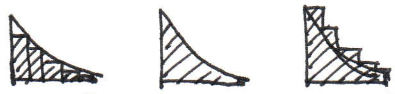
(3) $a_n = \dfrac{\log n}{n}$ より. $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \lim_{n\to\infty}\frac{\log n}{n}\cdot\frac{n+1}{\log(n+1)}$

ここで、$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\{\log(n+1)-\log n\} = \lim_{n\to\infty}\log\frac{n+1}{n} = 0$ より. $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\log(n+1)}{\log n} = 1$

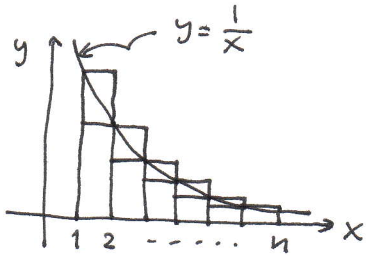
ゆえに、$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \lim_{n\to\infty}\frac{\log n}{\log(n+1)}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n} = 1$ $\qquad \underline{\therefore\ r=1}$

(注) 上の議論は不正確?

$\Rightarrow\ \displaystyle\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k} < \log n < \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}$ を利用(右図)



の面積　の面積　の面積



これより、$1 > \dfrac{\log n}{\log(n+1)} > \dfrac{\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k}}{\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}} = 1 - \dfrac{1}{\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}} \xrightarrow{(n\to\infty)} 1$ $\qquad \therefore\ \displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\log n}{\log(n+1)} = 1$

(4) $f(z) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} z^{n!} = z + z^2 + z^6 + z^{24} + \cdots$

ゆえに、nが $m!$ の形のとき $a_n = 1$、そうでないとき $a_n = 0$.

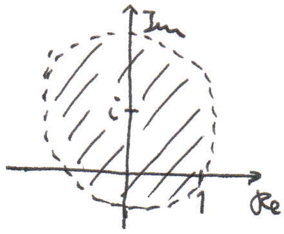
$$\therefore\ \overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{1} = 1. \qquad \therefore\ r=1$$

31.

(1) $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} z^n$, $|z|<1$

(2) $$\frac{1}{1-z}=\frac{1}{(1-i)-(z-i)}=\frac{\frac{1}{1-i}}{1-\left(\frac{z-i}{1-i}\right)}=\frac{1}{1-i}\cdot\frac{1}{1-\left(\frac{z-i}{1-i}\right)}$$

ゆえに、$\left|\frac{z-i}{1-i}\right|<1$ で収束 $\Leftrightarrow$ $|z-i|<\sqrt{2}$ で収束（右図）



このとき、$$f(z)=\frac{1}{1-z}=\frac{1}{1-i}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-i}{1-i}\right)^n$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(1-i)^{n+1}}(z-i)^n$$, 収束半径 $=\sqrt{2}$

(3) $$\frac{1}{1-z}=\frac{1}{1-b-(z-b)}=\frac{\frac{1}{1-b}}{1-\left(\frac{z-b}{1-b}\right)}=\frac{1}{1-b}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-b}{1-b}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(1-b)^{n+1}}(z-b)^n$$

収束~~半径~~領域は $\left|\frac{z-b}{1-b}\right|<1$ より、$|z-b|<|1-b|$. ∴ 収束半径 $=|1-b|$

33.

(1) $f(z)=\frac{z}{9-z^2}$ は $C:|z|=2$ の内部で正則。ゆえに、

コーシーの積分公式が使えて、$f(-i)=\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{f(z)}{z+i}dz$.

$$\therefore \oint_C\frac{z}{(9-z^2)(z+i)}dz=\oint_C\frac{f(z)}{z+i}dz=2\pi i f(-i)=\frac{\pi}{5}$$

(2) $$\oint_C\frac{e^z}{z^2-1}dz=\frac{1}{2}\oint_C\frac{e^z}{z-1}dz-\frac{1}{2}\oint_C\frac{e^z}{z+1}dz$$

ここで、$f(z)=e^z$ は複素平面上でつねに正則、なので、コーシーの積分公式より、

$$=\frac{1}{2}\oint_C\frac{f(z)}{z-1}dz-\frac{1}{2}\oint_C\frac{f(z)}{z+1}dz$$
$$=\frac{1}{2}\cdot 2\pi i f(1)-\frac{1}{2}\cdot 2\pi i f(-1)=\pi i(e-e^{-1})$$

32. (1) 右図の $C' = C + C_r^{-1}$ の内部で、

$\dfrac{f(z)}{z-a}$ は正則。ゆえに、コーシーの定理より、

$$\oint_{C'} \frac{f(z)}{z-a}\,dz = 0$$

$$\Leftrightarrow \oint_{C} \frac{f(z)}{z-a}\,dz + \oint_{C_r^{-1}} \frac{f(z)}{z-a}\,dz \qquad \therefore \oint_{C} \frac{f(z)}{z-a}\,dz = \oint_{C_r} \frac{f(z)}{z-a}\,dz.$$

(2)
$$\oint_{C_r} \frac{f(z)}{z-a}\,dz = \int_0^{2\pi} \frac{f(a+re^{it})}{a+re^{it}-a} \cdot ire^{it}\,dt = i\int_0^{2\pi} f(a+re^{it})\,dt$$

(3)
$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{C} \frac{f(z)}{z-a}\,dz = \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_r} \frac{f(z)}{z-a}\,dz = \frac{i}{2\pi i}\int_0^{2\pi} f(a+re^{it})\,dt$$

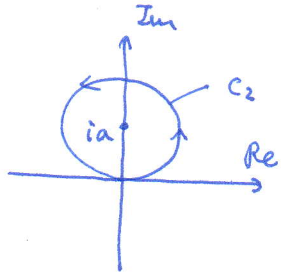
ここで r が任意であるので、$r \to +0$ とすれば、最右辺 $\to \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(a)\,dt$

$= f(a)$

ゆえに、$f(a) = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\oint_{C} \frac{f(z)}{z-a}\,dz.$

(4)
$$\oint_{C_2} \frac{1}{z^2+a^2}\,dz = \oint_{C_2} \frac{1}{(z+ia)(z-ia)}\,dz = \oint_{C_2} \frac{g(z)}{z-ia}\,dz \quad \text{とおく.}$$

ここで、$g(z) = \dfrac{1}{z+ia}$ は C_2 の内部で正則。



ゆえに、コーシーの積分公式より、

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_2} \frac{g(z)}{z-ia}\,dz = g(ia) = \frac{1}{2ia}$$

$$\therefore \oint_{C_2} \frac{1}{z^2+a^2}\,dz = \oint_{C_2} \frac{g(z)}{z-ia}\,dz = \frac{2\pi i}{2ia} = \frac{\pi}{a}$$