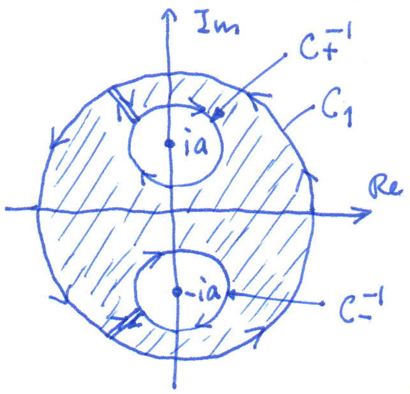
物理情報数学A ー 問題解答

27. $f(z)=\dfrac{1}{z^2+a^2}=\dfrac{1}{2ia}\left(\dfrac{1}{z-ia}-\dfrac{1}{z+ia}\right)$ は $z=\pm ia$ に特異点をもつ.

(1) $z=\pm ia$ のまわりに半径 r の小円 C_+, C_- をとると, $f(z)$ は, 経路 $C'=C_1+C_+^{-1}+C_-^{-1}$ の内部で正則（下図：）. ゆえにコーシーの定理より,



$$\oint_{C'} f(z)dz=0$$

$$\Longleftrightarrow \oint_{C_1+C_+^{-1}+C_-^{-1}} f(z)dz=0$$

$$\Longleftrightarrow \oint_{C_1} f(z)dz+\oint_{C_+^{-1}} f(z)dz+\oint_{C_-^{-1}} f(z)dz$$

$$\therefore \oint_{C_1} f(z)dz=-\oint_{C_+^{-1}} f(z)dz-\oint_{C_-^{-1}} f(z)dz$$

$$=\oint_{C_+} f(z)dz+\oint_{C_-} f(z)dz$$

- 第1項 $=\dfrac{1}{2ia}\displaystyle\oint_{C_+}\dfrac{1}{z-ia}dz-\dfrac{1}{2ia}\oint_{C_+}\dfrac{1}{z+ia}dz$

  ここで, $\dfrac{1}{z+ia}$ は C_+ の内部で正則なので, コーシーの定理より, $\displaystyle\oint_{C_+}\dfrac{1}{z+ia}dz=0$.

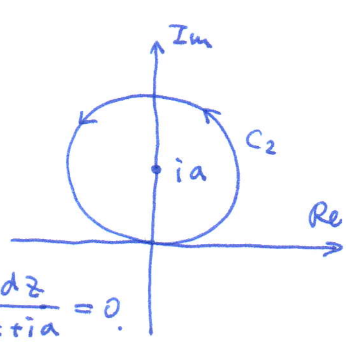
  $\therefore$ 第1項 $=\dfrac{1}{2ia}\displaystyle\oint_{C_+}(z-ia)^{-1}dz=\dfrac{2\pi i}{2ia}$ （§4.1の例題より）.

- 第2項 $=\dfrac{1}{2ia}\displaystyle\oint_{C_-}\dfrac{1}{z-ia}dz-\dfrac{1}{2ia}\oint_{C_-}\dfrac{1}{z+ia}dz$

  ここで, $\dfrac{1}{z-ia}$ は C_- の内部で正則なので, コーシーの定理より, $\displaystyle\oint_{C_-}\dfrac{1}{z-ia}dz=0$.

  $\therefore$ 第2項 $=-\dfrac{1}{2ia}\displaystyle\oint_{C_-}(z+ia)^{-1}dz=\dfrac{-2\pi i}{2ia}$

以上より, $\displaystyle\oint_{C_1} f(z)dz=\dfrac{2\pi i}{2ia}-\dfrac{2\pi i}{2ia}=0$.



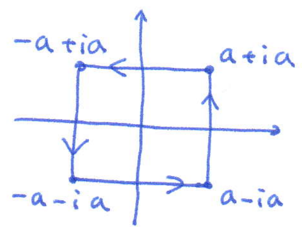
(2) $\displaystyle\oint_{C_2} f(z)dz=\dfrac{1}{2ia}\oint_{C_2}\dfrac{1}{z-ia}dz-\dfrac{1}{2ia}\oint_{C_2}\dfrac{1}{z+ia}dz$

$\dfrac{1}{z+ia}$ は C_2 の内部で正則なので, コーシーの定理より $\displaystyle\oint_{C_2}\dfrac{dz}{z+ia}=0$.

$\therefore \displaystyle\oint_{C_2} f(z)dz=\dfrac{1}{2ia}\oint_{C_2}(z-ia)^{-1}dz=\dfrac{2\pi i}{2ia}=\dfrac{\pi}{a}$

28. $f(z)=\dfrac{|z|^2-2\mathrm{Re}(z)}{z-1}=\dfrac{z\bar z-(z+\bar z)}{z-1}=\dfrac{\bar z(z-1)-z}{z-1}=\bar z-\dfrac{z}{z-1}$

$$=\bar z-\frac{z-1+1}{z-1}=\bar z-1-\frac{1}{z-1}$$



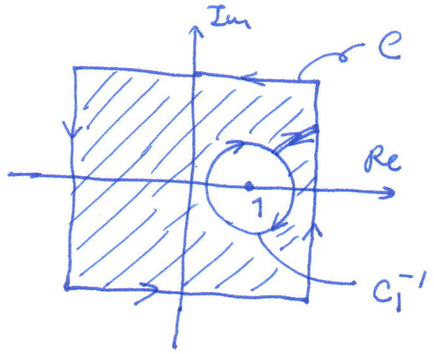
$\therefore\ \oint_C f(z)\,dz=\oint_C \bar z\,dz-\oint_C dz-\oint_C \dfrac{1}{z-1}\,dz$

・第1項：問26 (3) より，一般に $\oint_C \bar z\,dz=2i$（Cの内部領域の面積）

$\therefore$ 第1項 $=2i(2a\times 2a)=8a^2 i$

・第2項：$\tilde f(z)=1$ は C の内部で正則なので，コーシーの定理より，

第2項 $=\oint_C dz=0$.



・第3項：$z=1$ まわりの，半径 r の小円 C_1 をとっておき，

$\dfrac{1}{z-1}$ は，$C'=C+C_1^{-1}$ の内部で正則．

ゆえに，コーシーの定理より，$\oint_{C'}\dfrac{1}{z-1}\,dz=0$.

$$\Longleftrightarrow\ \oint_C \frac{1}{z-1}\,dz+\oint_{C_1^{-1}}\frac{1}{z-1}\,dz=0.$$

$$\therefore\ \oint_C \frac{1}{z-1}\,dz=-\oint_{C_1^{-1}}\frac{1}{z-1}\,dz=\oint_{C_1}(z-1)^{-1}\,dz=2\pi i$$

以上より，$\oint_C f(z)=8a^2 i+0-2\pi i=2i(4a^2-\pi)$

29. (1) $\dfrac{2}{(z-i)^2(z-1)}=\dfrac{a}{(z-i)^2}+\dfrac{b}{(z-i)}+\dfrac{c}{z-1}+d$

この等式から a, b, c, d を決定する．まず

右辺 $=\dfrac{a(z-1)+b(z-i)(z-1)+c(z-i)^2+d(z-i)^2(z-1)}{(z-i)^2(z-1)}$

$=\dfrac{dz^3+(2次以下の項)}{(z-i)^2(z-1)}$

で，この分子が 2 であるから，直ちに $d=0$ が従う．

※ 上の（2次以下の項）をすべて計算して，係数比較により a, b, c を決定してもOK

次に、等式の両辺に $(z-i)^2$ をかけて、

$$\frac{2}{z-1} = a + b(z-i) + \frac{(z-i)^2}{z-1}c \quad — ①.$$

これに $z=i$ を代入して、$a = \frac{2}{i-1} = \frac{2(-1-i)}{(-1+i)(-1-i)} = \frac{2(-1-i)}{2} = -1-i$

同様に、$z-1$ をかけて、$\frac{2}{(z-i)^2} = \frac{z-1}{(z-i)^2}a + \frac{z-1}{z-i}b + c$

ゆえに、$z=1$ を代入すれば、$c = \frac{2}{(1-i)^2} = \frac{2}{1-2i-1} = \frac{1}{-i} = i$

最後に、①の両辺を z で微分すれば、

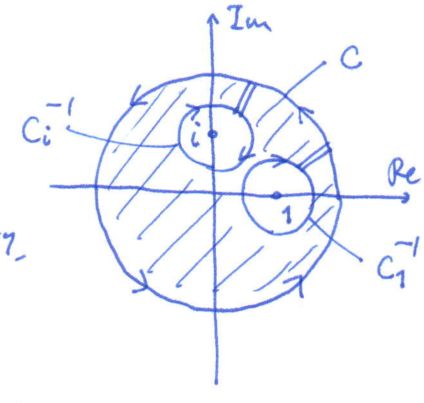
$$\frac{-2}{(z-1)^2} = b + \frac{2(z-i)(z-1)-(z-i)^2}{(z-1)^2}c$$

これに $z=i$ を代入して、$b = \frac{-2}{(i-1)^2} = \frac{-2}{1-2i-1} = \frac{1}{i} = -i$

以上より、$(a, b, c, d) = (-1-i, -i, i, 0)$.

(2) $$\oint_C f(z)\,dz = -(1+i)\oint_C \frac{1}{(z-i)^2}dz - i\oint_C \frac{1}{z-i}dz + i\oint_C \frac{1}{z-1}dz$$

各項の被積分関数は、右図の経路 $C + C_i^{-1} + C_1^{-1}$ の内部で正則。さらに $\frac{1}{(z-i)^2}$, $\frac{1}{z-i}$ は C_1 の内部で正則で、$\frac{1}{z-1}$ は C_i の内部で正則なので、コーシーの定理より



$$\oint_C f(z)\,dz = -(1+i)\oint_{C_i} \frac{1}{(z-i)^2}dz$$

$$- i\oint_{C_i} \frac{1}{z-i}dz + i\oint_{C_1} \frac{1}{z-1}dz$$

$$= -(1+i)\cdot 0 - i\cdot 2\pi i + i\cdot 2\pi i = 0.$$

ただし、§4.1の例題の結果を用いた：$\oint_C (z-\alpha)^n dz = \begin{cases} 2\pi i & (n=-1) \\ 0 & (n\neq -1) \end{cases}$

Cは中心 α, 半径 r の円.