物理情報数学A - 問題解答

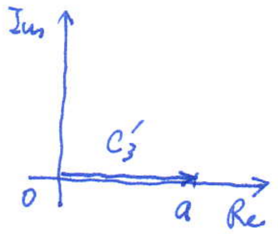
19. (1) C_1 上の点 $z(t)=x(t)+iy(t)$ は、$x(t)=at$, $y(t)=bt$ $(t:0\to 1)$ と書ける.

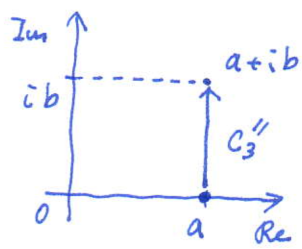
$$\therefore \int_{C_1} \underbrace{z}_{f(z)=z}\,dz = \int_0^1 \underbrace{(at+ibt)}_{\substack{f(z(t))\\ =z(t)}}\underbrace{(a+ib)}_{\frac{dz(t)}{dt}}\,dt = (a+ib)^2\int_0^1 t\,dt = \frac{1}{2}(a+ib)^2$$

(2) C_2 上の点 $z(t)=x(t)+iy(t)$ は、$x(t)=at$, $y(t)=bt^2$ $(t:0\to 1)$ と表せる.

$$\therefore \int_{C_2} z\,dz = \int_0^1 (at+ibt^2)(a+2ibt)\,dt = \int_0^1 (a^2t+3iabt^2-2b^2t^3)\,dt$$
$$= \frac{1}{2}(a+ib)^2$$

(3) 右図のように C_3 を C_3' と C_3'' に分割する.





このとき、

$$\int_{C_3} z\,dz = \int_{C_3'} z\,dz + \int_{C_3''} z\,dz.$$

• C_3' 上の点 $z(t)$ は、$z(t)=x(t)+iy(t)$, $x(t)=t$, $y(t)=0$ $(t:0\to a)$ と表せる.

$$\therefore \int_{C_3'} z\,dz = \int_0^a t\cdot 1\cdot dt = \frac{a^2}{2}$$

• C_3'' 上の点 $z(t)$ は $z(t)=x(t)+iy(t)$, $x(t)=a$, $y(t)=t$ $(t:0\to b)$ と表せる.
（C_3' 上の到達点 $z=a$ における時刻 $t=a$ をリセットして、初期時刻 $t=0$ とする.）

$$\therefore \int_{C_3''} z\,dz = \int_0^b (a+it)\cdot i\,dt = \int_0^b (ia-t)\,dt = iab-\frac{b^2}{2}$$

以上より、$$\int_{C_3} z\,dz = \frac{a^2}{2}+iab-\frac{b^2}{2} = \frac{1}{2}(a+ib)^2$$

20. パラメータ表示の仕方はすべて問19.の場合と同じとする.

(1) $$\int_{C_1} \bar{z}\,dz = \int_0^1 \overline{(at+ibt)}\cdot(a+ib)\,dt = \int_0^1 (at-ibt)(a+ib)\,dt$$
$$= (a-ib)(a+ib)\int_0^1 t\,dt = \frac{1}{2}(a^2+b^2)$$

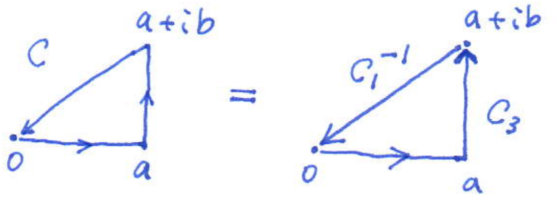
(2) $$\int_{C_2} \bar{z}\,dz = \int_0^1 \overline{(at+ibt^2)}\,(a+2ibt)\,dt = \int_0^1 (at-ibt^2)(a+2ibt)\,dt$$
$$= \int_0^1 (a^2t+iabt^2+2b^2t^3)\,dt = \frac{1}{2}(a^2+b^2)+\frac{i}{3}ab$$

(3) $\displaystyle\int_{C_3'} \bar{z}\,dz = \int_0^a \bar{t}\cdot 1\cdot dt = \int_0^a t\,dt = \frac{a^2}{2}$

$\displaystyle\int_{C_3''} \bar{z}\,dz = \int_0^b \overline{(a+it)}\cdot i\,dt = \int_0^b (a-it)i\,dt = \int_0^b (ia+t)\,dt = iab+\frac{b^2}{2}$

$\displaystyle\therefore \int_{C_3} \bar{z}\,dz = \frac{a^2}{2} + iab + \frac{b^2}{2} = \frac{1}{2}(a^2+b^2) + iab$

21. 右図の通り，Cは，両向における2つの経路 C_1^{-1} と C_3 を連結したものである．つまり，



$$\oint_C f(z)\,dz = \int_{C_3} f(z)\,dz + \int_{C_1^{-1}} f(z)\,dz$$

$$= \int_{C_3} f(z)\,dz - \int_{C_1} f(z)\,dz.$$

(1) $\displaystyle\oint_C z\,dz = \int_{C_3} z\,dz - \int_{C_1} z\,dz = \frac{1}{2}(a+ib)^2 - \frac{1}{2}(a+ib)^2 = 0.$

(2) $\displaystyle\oint_C \bar{z}\,dz = \int_{C_3} \bar{z}\,dz - \int_{C_1} \bar{z}\,dz = \frac{1}{2}(a^2+b^2) + iab - \frac{1}{2}(a^2+b^2) = iab$

22. (1) 円周上の点 $z(t)=x(t)+iy(t)$ は， $x(t)=r\cos t$, $y(t)=r\sin t$ $(t: 0\to 2\pi)$ とおける．

これより， $z(t) = r(\cos t + i\sin t) = re^{it}$

$$\therefore \oint_C z\,dz = \int_0^{2\pi} re^{it}\cdot rie^{it}\,dt = ir^2\int_0^{2\pi} e^{2it}\,dt$$

$$= ir^2\cdot\frac{1}{2i}e^{2it}\Big|_0^{2\pi} = \frac{r^2}{2}(e^{4\pi i}-1) = \frac{r^2}{2}(\cos 4\pi + i\sin 4\pi - 1) = 0$$

(2) $\displaystyle\oint_C \bar{z}\,dz = \int_0^{2\pi} \overline{re^{it}}\cdot rie^{it}\,dt = \int_0^{2\pi} re^{-it}\cdot ire^{it}\,dt = ir^2\int_0^{2\pi} dt = 2\pi i r^2$

23. (1) $z(t) = \cos t + i\sin t = e^{it}$ である．

$$\therefore \oint_C \frac{1}{z}\,dz = \int_0^{2\pi}\frac{1}{e^{it}}\cdot ie^{it}\,dt = i\int_0^{2\pi} dt = 2\pi i$$

(2)

$$\oint_C \frac{1}{z-2}\,dz = \int_0^{2\pi}\frac{1}{e^{it}-2}\cdot ie^{it}\,dt = -i\int_0^{2\pi}\frac{e^{it}}{2-e^{it}}\,dt$$

$$= -i\left[\log(2-e^{it})\right]\cdot\frac{1}{-i}\Big|_0^{2\pi} = \log 1 - \log 1 = 0.$$

24.

(1) $\left| \int_C f(z)\,dz \right| = \left| \int_{t_1}^{t_2} f(z(t)) \dfrac{dz(t)}{dt}\,dt \right| \leqq \int_{t_1}^{t_2} \left| f(z(t)) \dfrac{dz(t)}{dt} \right| dt$

$$= \int_{t_1}^{t_2} |f(z(t))| \cdot \left| \frac{dz(t)}{dt} \right| dt \qquad (\because\ |z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|)$$

$$\leqq M \int_{t_1}^{t_2} \left| \frac{dx(t)}{dt} + i\frac{dy(t)}{dt} \right| dt \qquad (\ z(t) = x(t) + iy(t)\ \text{としている})$$

$$= M \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\left(\frac{dx(t)}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy(t)}{dt}\right)^2}\,dt \qquad (\text{絶対値の定義})$$

$$= M \cdot L$$

(2) 円周上の点 $z(t)$ は, $z(t) = x(t) + iy(t)$, $x(t) = r\cos t$, $y(t) = r\sin t$

とおける. つまり, $z(t) = r(\cos t + i\sin t) = re^{it}$. $(t : 0 \to 2\pi)$ このとき,

$$|f(z(t))| = \left| \frac{1}{z(t)^2 + a^2} \right| = \frac{1}{|z(t)^2 + a^2|} \qquad \left(\because\ \left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}\right)$$

$$= \frac{1}{|r^2 e^{2it} + a^2|} = \frac{1}{|r^2\cos 2t + a^2 + i \cdot r^2 \sin 2t|}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{(r^2\cos 2t + a^2)^2 + (r^2\sin 2t)^2}} = \frac{1}{\sqrt{r^4\cos^2 2t + 2r^2a^2\cos 2t + a^4 + r^4\sin^2 2t}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{r^4 + 2r^2a^2\cos 2t + a^4}} \leqq \frac{1}{\sqrt{r^4 - 2r^2a^2 + a^4}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{(r^2 - a^2)^2}} = \frac{1}{r^2 - a^2} \qquad (\ r > a\ \text{としている})$$

ゆえに, C上の点 z に対して, $|f(z)| \leqq \dfrac{1}{r^2 - a^2}$ がつねに成立する. 一方,

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{(-r\sin t)^2 + (r\cos t)^2}\,dt = 2\pi r \qquad (\text{円周なので明らか})$$

ゆえに, (1)の結果より, $\left| \oint_C f(z)\,dz \right| \leqq ML = \dfrac{2\pi r}{r^2 - a^2}$

(注意) 複素積分を具体的に計算しなくても, その絶対値を評価できる, という例.

とくに, $r \to +\infty$ とするとき上限がゼロに収束するので, $\displaystyle\lim_{r \to +\infty} \oint_C f(z)\,dz = 0$.