

物理情報科学 A - 問題解答

1. (1) $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) $z \neq 0$, $\bar{z} = a - bi$. かつ,

$$|\bar{z}| = \sqrt{a^2 + (-b)^2} = \sqrt{a^2 + b^2} = |z|$$

$$(2) \left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \left| \frac{z_1 \cdot \bar{z}_2}{z_2 \cdot \bar{z}_2} \right| = \left| \frac{z_1 \bar{z}_2}{|z_2|^2} \right| = \frac{|z_1 \bar{z}_2|}{|z_2|^2} = \frac{|z_1| \cdot |\bar{z}_2|}{|z_2|^2} = \frac{|z_1| \cdot |z_2|}{|z_2|^2} = \frac{|z_1|}{|z_2|}$$

$$2. \left| \frac{\alpha - \beta}{1 - \bar{\alpha}\beta} \right| < 1 \Leftrightarrow \frac{|\alpha - \beta|}{|1 - \bar{\alpha}\beta|} < 1 \Leftrightarrow |\alpha - \beta|^2 < |1 - \bar{\alpha}\beta|^2$$

$$\Leftrightarrow (\alpha - \beta)(\alpha - \beta) < (1 - \bar{\alpha}\beta)(1 - \bar{\alpha}\beta)$$

$$\Leftrightarrow (\alpha - \beta)(\bar{\alpha} - \bar{\beta}) < (1 - \bar{\alpha}\beta)(1 - \alpha\bar{\beta})$$

$$\Leftrightarrow |\alpha|^2 - \alpha\bar{\beta} - \bar{\alpha}\beta + |\beta|^2 < 1 - \alpha\bar{\beta} - \bar{\alpha}\beta + |\alpha|^2 \cdot |\beta|^2$$

$$\Leftrightarrow |\alpha|^2 \cdot |\beta|^2 - |\alpha|^2 - |\beta|^2 + 1 > 0$$

$$\Leftrightarrow (|\alpha|^2 - 1)(|\beta|^2 - 1) > 0$$

つまり $|\alpha| < 1$, $|\beta| < 1$ かつ成立.

3. (1) $z = a + bi$ $z \neq 0$,

$$z + \bar{z} = a + bi + a - bi = 2a \leq 2\sqrt{a^2 + b^2} = 2|z| \leq 2$$

$$(2) |z_1 - z_2| \leq |z_1| + |z_2| \Leftrightarrow |z_1 - z_2|^2 \leq (|z_1| + |z_2|)^2$$

$$\Leftrightarrow (z_1 - z_2)(\bar{z}_1 - \bar{z}_2) \leq |z_1|^2 + 2|z_1| \cdot |z_2| + |z_2|^2$$

$$\Leftrightarrow |z_1|^2 - z_1\bar{z}_2 - \bar{z}_1z_2 + |z_2|^2 \leq |z_1|^2 + 2|z_1| \cdot |z_2| + |z_2|^2$$

つまり, $|z_1| = 0$ ($z_1 = 0$ と同じ) または $|z_2| = 0$ ($z_2 = 0$ と同じ) かつ,

三角不等式が成立する。(等号は z_1, z_2 が同方向の時成立). $z \neq 0$, $|z_1| \neq 0$, $|z_2| \neq 0$ かつ z_1, z_2 が同方向の時,

$$\text{つまり, } \frac{-z_1\bar{z}_2}{|z_1| \cdot |z_2|} + \frac{-\bar{z}_1z_2}{|z_1| \cdot |z_2|} \leq 2 \text{ が証明された. } z = \frac{-z_1\bar{z}_2}{|z_1| \cdot |z_2|} \text{ かつ } z \neq 0,$$

$$|z| = \frac{|-z_1\bar{z}_2|}{|z_1| \cdot |z_2|} = \frac{|z_1| \cdot |\bar{z}_2|}{|z_1| \cdot |z_2|} = \frac{|z_1| \cdot |z_2|}{|z_1| \cdot |z_2|} = 1$$

つまり (1) より $z + \bar{z} \leq 2$ が成立する.

4. $z_1 = x_1 + iy_1, z_2 = x_2 + iy_2$ とすれば

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2).$$

右図のように、これは複素平面における、平行四辺形の対角線に対応する。また、

$$z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2)$$

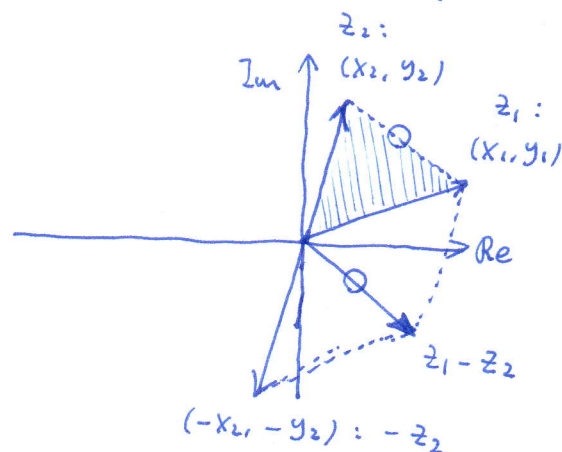
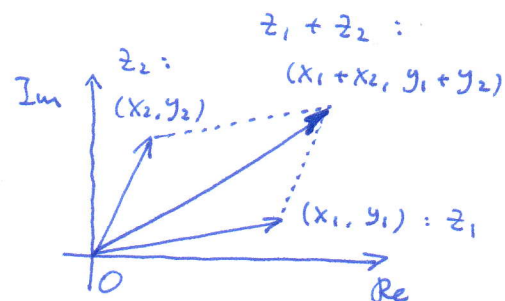
に対応するのは右図の平行四辺形の対角線。

これより、三角形 $\triangle$ に注目すれば、各辺の長さは

$|z_1|, |z_2|, |z_1 - z_2|$ となり、ゆえに

三角不等式は、任意の三角形における

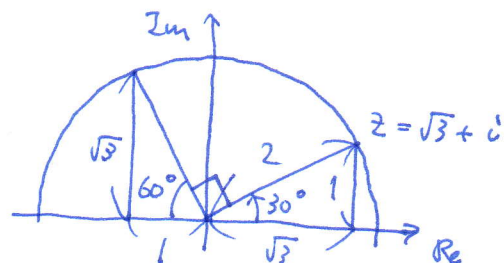
「1辺の長さ < 2辺の長さの和」 として表せる。
 $\hat{\text{他の}}$



5. (1) $z = \sqrt{3} + i = 2 \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right)$

(2) $z = -1 + \sqrt{3}i = 2 \left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right)$

(3) $z = i = \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}$



~ $z = \sqrt{3} + i$ に $z = i$ を 90° 回転すると (2) の $z = -1 + \sqrt{3}i$ になる。

6. $|z_2| = \sqrt{\cos^2 \theta_2 + \sin^2 \theta_2} = 1$ より、

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \bar{z}_2}{z_2 \bar{z}_2} = \frac{z_1 \bar{z}_2}{|z_2|^2} = z_1 \bar{z}_2 = (\cos \theta_1 + i \sin \theta_1)(\cos \theta_2 - i \sin \theta_2)$$

$$= \cos \theta_1 \cos \theta_2 + \sin \theta_1 \sin \theta_2 + i(\sin \theta_1 \cos \theta_2 - \cos \theta_1 \sin \theta_2)$$

$$= \cos(\theta_1 - \theta_2) + i \sin(\theta_1 - \theta_2)$$

ゆえに、 $\cos \theta_2 + i \sin \theta_2$ を割ると、 θ_2 だけ「逆回転する」。