

I. 定常過程, 自己相関関数

1 次元離散時間ガウス過程を考えます. すなわち, 時間に依存する確率変数 X_n が $X_n = aX_{n-1} + bW_n$ なる規則によって生成されているとします (ただし $-1 < a < 1$). ここで, $W_1, W_2, \dots$ は互いに独立で, 時刻によらず (平均 0, 分散 1) の標準正規分布 $\mathcal{N}(0, 1)$ に従うものとします.

まず, 異なる時刻 n, m における確率変数 X_n, X_m について, それらがどれくらい関連があるかを調べましょう. そのために, これらの共分散 $\text{Cov}(X_n, X_m) = \mathbb{E}(X_n X_m) - \mathbb{E}(X_n)\mathbb{E}(X_m)$ を計算すると (問題 44),

$$\text{Cov}(X_n, X_m) = a^{n+m}\sigma_0^2 + \frac{a^{m-n} - a^{m+n}}{1-a^2}b^2$$

を得ます. ただし, $m \geq n$ としています. とくにここで時間差 $k = m - n$ を導入すると, 上式は

$$\text{Cov}(X_n, X_{k+n}) = a^{2n+k}\sigma_0^2 + \frac{1-a^{2n}}{1-a^2}a^k b^2 \quad (1)$$

を得ます. ゆえに, $0 < a < 1$ であれば $\text{Cov}(X_n, X_{k+n}) > 0$, すなわち X_n と X_{k+n} が同傾向を示すことが分かります ($-1 < a < 0$ のときはどうでしょう?).

ここで, 時間差 k を保ったまま (1) で $n \rightarrow \infty$ とすると,

$$\text{Cov}(X_n, X_{k+n}) = \frac{1}{1-a^2}a^k b^2$$

となります. つまり, 長時間たった後は, X_n, X_{k+n} の共分散は時間差のみに依存することになります. このように, 確率過程の 2 時点 $n, n+k$ における共分散が時間差 k のみに依存するとき, その過程は「定常過程」と呼ばれます. またとくにそのときの共分散を「自己相関関数」と呼びます:

$$R_k = \text{Cov}(X_n, X_{k+n})$$

ガウス過程の場合, 長時間経ったら定常となるわけです. 上では $k > 0$ の場合に $R_k = a^k b^2 / (1-a^2)$ を求めたこととなりますが, $k \leq 0$ の場合もすぐに計算でき, 実際, $R_{-k} = R_k$ であることが分かります (問題 47). R_k を適当な a の場合に図示すると, 以下のようになります:

これより, a が大きいと相関が持続し, a が小さいと相関がすぐに消失することが分かります. このことは, a が大きいとき X_n が比較的ゆっくり変化するのに対して, a が小さいと X_n が素早く変化することを意味します. つまり, 定常過程においては, 確率変数の「変化の度合」が, 自己相関関数で特徴付けられるわけです.

II. パワースペクトル, ホワイトノイズ

一般に, 信号 $x(t)$ の解析にはフーリエ変換が有用です. ゆっくり/素早く変化する信号成分, 特異的に変化する信号成分などがどれくらい $x(t)$ に含まれているかを明らかにしてくれます. 具体的には, フーリエ変換

$$\tilde{x}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-i\omega t} dt$$

の絶対値 $|\tilde{x}(\omega)|$ が, 周波数 ω の信号成分がどれほど $x(t)$ に含まれているかを表します.

このツールを定常確率過程にも適用することができます. 前節で見たように, 定常確率過程の変化の度合いは自己相関関数 R_k で把握することが可能です. R_k が急激に減衰する場合, それは X_n が素早く変化している傾向が強いことを意味します. なので, R_k 自体がどのような変動成分を含んでいるかを調べれば, それは X_n の変化の度合いについて有益な情報を与えます. いまとくに k は離散時刻を表すので, 「離散フーリエ変換」

$$S(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} R_k e^{-i\omega k}, \quad (-\pi < \omega \leq \pi) \quad (2)$$

を考えます. 逆フーリエ変換は

$$R_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} S(\omega) e^{i\omega k} d\omega \quad (3)$$

で与えられます (問題 46). 周波数の帯域が $-\pi < \omega \leq \pi$ と制限されていても, もとの関数 R_k が復元できることに注意してください. (つまり, R_k はこの帯域の振動成分しか含んでいない.) いま, $R_0 = \mathbb{V}(X_n)$ と (3) 式から

$$\mathbb{V}(X_n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} S(\omega) d\omega$$

が成立します. つまり, ゆらぎの大きさ = 信号のパワー = 周波数領域で分解したわけです. 従って, $S(\omega)$ は周波数 ω の振動成分のパワーを表しており, ゆえに (2) 式は「パワースペクトル」と呼ばれます. 下図は, ガウス過程の場合のパワースペクトルです.

なお, $a = 0$ の場合, X_n は大きさ b の正規ノイズそのものになります. このとき $S(\omega) = b^2$ ($-\pi < \omega \leq \pi$) となり, パワースペクトルがフラットになります. 従って, 白色太陽光のスペクトルがフラットであることのアナロジーから, 正規ノイズ W_n を「ホワイトノイズ」と呼びます.