

$$41. \sigma_n^2 - \sigma_{n-1}^2 = \left(a^{2n} \sigma_0^2 + b^2 \cdot \frac{1-a^{2n}}{1-a^2} \right) - \left(a^{2n-2} \sigma_0^2 + b^2 \cdot \frac{1-a^{2n-2}}{1-a^2} \right) \\ = \dots = a^{2n} \cdot \frac{1-a^2}{a^2} \left(\frac{b^2}{1-a^2} - \sigma_0^2 \right)$$

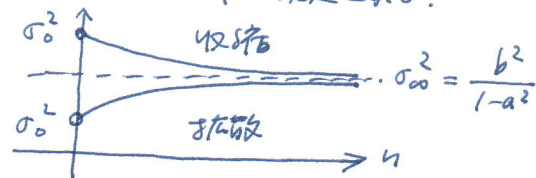
すなわち、初期分布の分散が

$$\sigma_0^2 < \frac{b^2}{1-a^2}$$

を満たす場合は $\sigma_n^2 > \sigma_{n-1}^2$ となり、分散が収束。
($-1 < a < 1$ に注意). 逆に、 $\sigma_0^2 > \frac{b^2}{1-a^2}$
ならば、 $\sigma_n^2 < \sigma_{n-1}^2$ となり、分散が収束。

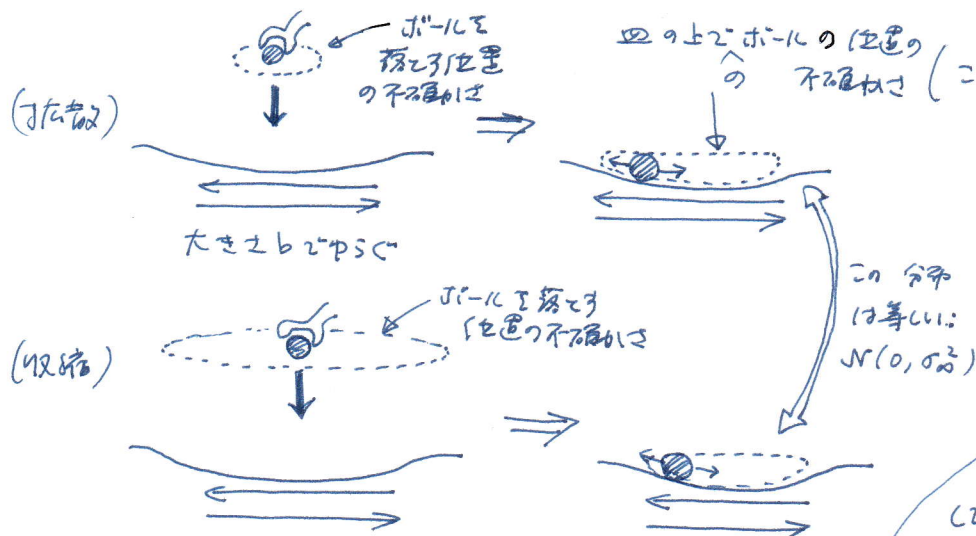
$\frac{b^2}{1-a^2}$ は定常分布の分散 ($\sigma_\infty^2 = \frac{b^2}{1-a^2}$)

すなわち σ_n^2 は σ_0^2 によらずにこれに収束する。すなわち、初期分布がたとえ何であれ、収束の値が決定される。



下図のような

分散 / 収束過程の例は次のようなもの: 水平方向にノイズで受けたマスケット銃の上にボールを落とす。初期状態は、「この位置からボールを落とすか」に依存した不確実性がある。これは初期分布の分散に対応する (σ_0^2)。一方、ボールが銃の上にこのように落ちてくれば、初期分布によらずに、これが $\sigma_\infty^2 = \frac{b^2}{1-a^2}$ に対応する。つまり、最初からボールを落とす位置が正確に決まらなくても (つまり、 σ_0^2 が小さい) の場合は、不確実性は増大するが、最初からボールの位置が不明確な場合 (つまり、 σ_0^2 が大きい) 場合は、逆にボールが正確に落ちる不確実性は減っていく。つまり、ボールの位置についてつづつ情報を得ている分だけエントロピーが減っていく。



(これは定常分布に対応し、初期分布に依存せずには決まる)

Question

以上の議論は、この実験を多数回行て得られる統計的事実、あるいは、ボールを投げた瞬間から決まる実験的分散現象を規定している。もし、1回きりの実験でしかボールをある程度正確に落とすことができない位置に落ちる不確実性はどうなるか? そのような議論は可能か?

→ カルビン・ワイル (56)

