

36. (i) $k = 2, 3, \dots, M-2$ に対しては通常のジャンプアウト-75の2°.

$$\pi_n(k) = p\pi_{n-1}(k-1) + q\pi_{n-1}(k+1).$$

(ii) $k = M-1, M$ における境界条件は由342°の2°の通り.

$$\pi_n(M) = p\pi_{n-1}(M-1) + \pi_{n-1}(M)$$

$$\pi_n(M-1) = p\pi_{n-1}(M-2)$$

(iii) $k = 0, 1$ に対するは以下の通り:

$$\pi_n(0) = P(\{X_n = 0\})$$

$$= P(\{X_n = 0\} \cap \{W_n = 1\}) + P(\{X_n = 0\} \cap \{W_n = -1\})$$

$$= P(\{X_{n-1} = 0\}) + P(\{X_{n-1} = 1\} \cap \{W_n = -1\})$$

$$= P(\{X_{n-1} = 0\}) + P(\{X_{n-1} = 1\}) \cdot P(\{W_n = -1\}) \quad (\because \text{独立})$$

$$= \pi_{n-1}(0) + q\pi_{n-1}(1)$$

$$\pi_n(1) = P(\{X_n = 1\})$$

$$= P(\{X_n = 1\} \cap \{W_n = 1\}) + P(\{X_n = 1\} \cap \{W_n = -1\})$$

$$= 0 + P(\{X_{n-1} = 2\} \cap \{W_n = -1\}) = q\pi_{n-1}(2)$$

37. $M=2$ のとき、破産問題の確率ベクトルは、次の漸化式を満たす.

$$\begin{bmatrix} \pi_n(2) \\ \pi_n(1) \\ \pi_n(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & q & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \pi_{n-1}(2) \\ \pi_{n-1}(1) \\ \pi_{n-1}(0) \end{bmatrix}$$

これより $\vec{\pi}_n = T \vec{\pi}_{n-1}$ と表せる. $T^2 = T$ が成立. ゆえに, $T^n = T$.

$$\therefore \vec{\pi}_n = T \vec{\pi}_{n-1} = T \cdot T \vec{\pi}_{n-2} = T^2 \vec{\pi}_{n-2} = \dots = T^n \vec{\pi}_0 = T \vec{\pi}_0$$

38. $M=3$ のとき、確率ベクトルが満たす漸化式 $\vec{\pi}_n = T \vec{\pi}_{n-1}$ となる.

$$T = \begin{bmatrix} 1 & p & 0 \\ 0 & 0 & p \\ q & 0 & 0 \\ 0 & q & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{よって, } \vec{\pi}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ とすると, } \vec{\pi}_n = T^n \vec{\pi}_0 = \begin{bmatrix} p(1 + p^2 + p^4 + \dots) \\ 0 \\ p^2 + p^4 + \dots \\ q^2(1 + p^2 + p^4 + \dots) \end{bmatrix}$$

$$\text{ゆえに一般に, } \vec{\pi}_\infty = \begin{bmatrix} p(1 + p^2 + p^4 + \dots) \\ 0 \\ 0 \\ q^2(1 + p^2 + p^4 + \dots) \end{bmatrix} = \frac{1}{1-p^2} \begin{bmatrix} p \\ 0 \\ 0 \\ q^2 \end{bmatrix}$$

39. $n \rightarrow +\infty$ として、 $\pi_n(k)$ は π -分布に近づく (定理 38.2 参照)。このとき、 $\pi_n(k) = \pi_{n-1}(k)$ 。

したがって $n \geq 1$ のとき、 $k \geq 0$ に対して $\pi(k) = \pi_n(k)$ と表す。

$$\begin{cases} \pi(k) = p\pi(k-1) + q\pi(k+1) & (k \geq 2) \quad \text{--- ①} \\ \pi(1) = \pi(0) + q\pi(2), \quad \pi(0) = q\pi(1) & \text{--- ②} \end{cases}$$

この連立漸化式を解く。まず π -分布に近づくのは、定常分布。

まず、 $\Delta\pi(k) := \pi(k) - \pi(k-1)$ とおくと、

$$\begin{aligned} \text{①より、} \quad \underbrace{(p+q)}_{=1} \pi(k) &= p\pi(k-1) + q\pi(k+1) \iff p[\pi(k) - \pi(k-1)] \\ &= q[\pi(k+1) - \pi(k)] \end{aligned}$$

$$\therefore \Delta\pi(k+1) = \frac{p}{q} \Delta\pi(k) = \left(\frac{p}{q}\right)^2 \Delta\pi(k-1) = \dots = \left(\frac{p}{q}\right)^{k-1} \Delta\pi(2)$$

$$\pi(k) - \pi(k-1) = \left(\frac{p}{q}\right)^{k-2} \Delta\pi(2) \quad \text{したがって:} \quad \begin{aligned} \pi(k) - \pi(k-1) &= \left(\frac{p}{q}\right)^{k-2} \Delta\pi(2) \\ \pi(k-1) - \pi(k-2) &= \left(\frac{p}{q}\right)^{k-3} \Delta\pi(2) \\ &\vdots \\ \pi(3) - \pi(2) &= \left(\frac{p}{q}\right)^1 \Delta\pi(2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore \pi(k) &= \pi(2) + \Delta\pi(2) \cdot \left(\frac{p}{q}\right) \cdot \frac{1 - \left(\frac{p}{q}\right)^{k-2}}{1 - \left(\frac{p}{q}\right)} \\ &= \frac{p}{q^2} \pi(0) + \frac{p-q}{q^2} \pi(0) \cdot \left(\frac{p}{q}\right) \cdot \frac{1 - \left(\frac{p}{q}\right)^{k-2}}{1 - \frac{p}{q}} \\ &= \frac{1}{p} \left(\frac{p}{q}\right)^k \pi(0) \end{aligned}$$

$$+ \underbrace{\pi(3) - \pi(2) = \left(\frac{p}{q}\right)^1 \Delta\pi(2)}_{\pi(k) - \pi(2) = \Delta\pi(2) \sum_{m=1}^{k-2} \left(\frac{p}{q}\right)^m}$$

漸化式
一定に定まる!

$$\pi(2) = \frac{p}{q^2} \pi(0), \quad \Delta\pi(2) = \frac{p-q}{q^2} \pi(0) \quad \text{②より}$$

この式は $k=1, 2, 3, \dots$ に適用できる。

$$\pi(0) \text{ は規格化条件: } \sum_{k=0}^{\infty} \pi(k) = 1 \text{ より決定する: } \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{p} \left(\frac{p}{q}\right)^k \pi(0) + \pi(0) = 1$$

$$\iff \frac{1}{p} \pi(0) \cdot \frac{p}{q} \cdot \frac{1}{1 - \frac{p}{q}} + \pi(0) = 1 \quad \therefore \pi(0) = \frac{q-p}{2q}$$

$$\text{したがって、無限級数 } \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{p}{q}\right)^k = \frac{p}{q} \cdot \frac{1}{1 - \frac{p}{q}} \text{ を用いる。これは } \frac{p}{q} < 1 \text{ (} q > p \text{) のとき成立。}$$

$$\text{結局、定常分布 } \pi_{\infty}(k) = \pi(k) \text{ は、} \quad \pi_{\infty}(0) = \frac{q-p}{2q}, \quad \pi_{\infty}(k) = \frac{q-p}{2pq} \left(\frac{p}{q}\right)^k \quad (k \geq 1)$$

40.

$$\begin{aligned} X_n &= aX_{n-1} + bW_n = a(aX_{n-2} + bW_{n-1}) + bW_n \\ &= a^2X_{n-2} + b(aW_{n-1} + W_n). \end{aligned}$$

以下同様にして, $X_n = a^n X_0 + b \sum_{k=1}^n a^{n-k} W_k.$

$$\begin{aligned} (i) \quad E_{X_n}(X_n) &= E_{X_0, W_1, \dots, W_n} \left[a^n X_0 + b \sum_{k=1}^n a^{n-k} W_k \right] \\ &= a^n E_{X_0}(X_0) + b \sum_{k=1}^n a^{n-k} E_{W_k}(W_k) \\ &= a^n \mu_0. \end{aligned}$$

↙ 独立.

$$\begin{aligned} (ii) \quad V_{X_n}(X_n) &= V_{X_0, W_1, \dots, W_n} \left[a^n X_0 + b \sum_{k=1}^n a^{n-k} W_k \right] \\ &= V_{X_0}(a^n X_0) + \sum_{k=1}^n V_{W_k}(b a^{n-k} W_k) \\ &= a^{2n} V_{X_0}(X_0) + \sum_{k=1}^n b^2 a^{2n-2k} V_{W_k}(W_k) \\ &= a^{2n} \sigma_0^2 + b^2 a^{2n} \sum_{k=1}^n (a^{-2})^k \\ &= a^{2n} \sigma_0^2 + b^2 a^{2n} \cdot a^{-2} \frac{1 - (a^{-2})^n}{1 - (a^{-2})} \\ &= a^{2n} \sigma_0^2 + b^2 \cdot \frac{1 - a^{-2n}}{1 - a^{-2}} \end{aligned}$$

↙ $X_0, W_1, \dots, W_n$ は互に独立.