26.

$$\mathbb{P}_{WZ}(\{W=w_i,\ Z=z_j\}) = \sum_k \mathbb{P}_{XYZ}(\{X=x_k,\ Y=w_i-x_k,\ Z=z_j\})$$

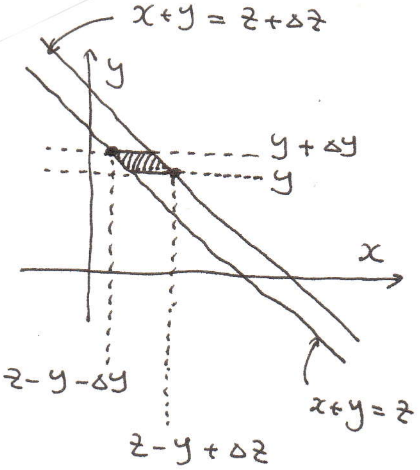
$$= \sum_k \mathbb{P}_X(\{X=x_k\})\cdot\mathbb{P}_Y(\{Y=w_i-x_k\})\cdot\mathbb{P}_Z(\{Z=z_j\})$$

$$= \left[\sum_k \mathbb{P}_{XY}(\{X=x_k,\ Y=w_i-x_k\})\right]\cdot\mathbb{P}_Z(\{Z=z_j\})$$

$$= \mathbb{P}_{XY}(\{X+Y=w_i\})\cdot\mathbb{P}_Z(\{Z=z_j\})$$

$$= \mathbb{P}_W(\{W=w_i\})\cdot\mathbb{P}_Z(\{Z=z_j\})$$

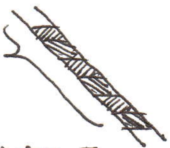
ゆえに、$W=X+Y$ と Z は独立.



27. $p(z)\cdot\Delta z = \mathbb{P}(\{Z=X+Y$ が区間 $[z, z+\Delta z]$ に値をとる$\})$

$= \bigcup_y \mathbb{P}(\{X$ が区間 $[z-y-\Delta y, z-y+\Delta z]$ に値をとる,
Y が区間 $[y, y+\Delta y]$ に値をとる$\})$

y は色々な値をとり得る.
しかし, それらの値を同時に
とることはない. ゆえに事象は排反.



$$= \sum_y p_{XY}(z-y,\ y)\cdot(\Delta y+\Delta z)\,\Delta y$$

定義: $\mathbb{P}(\{X$ が $[x, x+\Delta x]$ に,
Y が $[y, y+\Delta y]$ に値をとる$\})$
$= p_{XY}(x, y)\,\Delta x\,\Delta y$.

$$\xrightarrow[(\Delta y\to+0)]{} \int_{-\infty}^{\infty} p_{XY}(z-y,\ y)\,dy\cdot\Delta z$$

ゆえに, $p(z) = \int_{-\infty}^{\infty} p_{XY}(z-y,\ y)\,dy$. とくに X, Y が独立であれば

$p_{XY}(x, y) = p_X(x)\cdot p_Y(y)$ より, $p(z) = \int_{-\infty}^{\infty} p_X(z-y)\cdot p_Y(y)\,dy$.

28. $p(z)=\int_{-\infty}^{\infty} f(z-y)g(y)\,dy=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(z-y)^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-\frac{1}{2\sigma^2}y^2}dy$

$$=\frac{1}{2\pi\sigma^2}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(z^2-2zy+2y^2)}dy=\frac{1}{2\pi\sigma^2}e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{1}{\sigma^2}(y^2-zy)}dy$$

$$=\frac{1}{2\pi\sigma^2}\cdot e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{1}{\sigma^2}(y-\frac{z}{2})^2+\frac{z^2}{4\sigma^2}}dy=\frac{1}{2\pi\sigma^2}e^{-\frac{z^2}{4\sigma^2}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{1}{\sigma^2}(y-\frac{z}{2})^2}dy$$

$$=\frac{1}{\sqrt{4\pi\sigma^2}}e^{-\frac{1}{4\sigma^2}z^2}\int_{-\infty}^{\infty}\underbrace{\frac{1}{\sqrt{\pi\sigma^2}}e^{-\frac{1}{\sigma^2}(y-\frac{z}{2})^2}}\,dy=\frac{1}{\sqrt{4\pi\sigma^2}}e^{-\frac{1}{4\sigma^2}z^2}$$

(これは平均 $\frac{y}{2}$、分散 $\frac{\sigma^2}{2}$ の正規分布の密度関数。なので、規格化されている。つまり、積分すると1。)

ゆえに、$Z=X+Y$は正規分布 $N(0, 2\sigma^2)$ に従う。

(一般化)　Xが$N(\mu_1,\sigma_1^2)$、Yが$N(\mu_2,\sigma_2^2)$に従うとき(独立に)、

$$p(z)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_1^2}}e^{-\frac{1}{2\sigma_1^2}(z-y-\mu_1)^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_2^2}}e^{-\frac{1}{2\sigma_2^2}(y-\mu_2)^2}dy$$

これは上の計算法と同様。⟶ Zは「何らかの」正規分布に従う。一方、X、Yは独立より

$$\begin{cases}\mathbb{E}_Z(Z)=\mathbb{E}_Z(X+Y)=\mathbb{E}_X(X)+\mathbb{E}_Y(Y)=\mu_1+\mu_2\\ \mathbb{V}_Z(Z)=\mathbb{V}_Z(X+Y)=\mathbb{V}_X(X)+\mathbb{V}_Y(Y)=\sigma_1^2+\sigma_2^2\end{cases}$$

"独立な正規変数の和は正規変数"

つまり、Zは$N(\mu_1+\mu_2,\sigma_1^2+\sigma_2^2)$に従う。つまり密度関数が

$$p(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}}e^{-\frac{1}{2(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}(z-\mu_1-\mu_2)^2}$$

で与えられる。

公式

X, Yが独立で、それぞれ正規分布 $N(\mu_1,\sigma_1^2)$, $N(\mu_2,\sigma_2^2)$に従うとき、$Z=X+Y$は$N(\mu_1+\mu_2,\sigma_1^2+\sigma_2^2)$に従う。

29. $z=x+y\geq 0$ に対して、

$$p(z)=\int_{-\infty}^{\infty} f(z-y)g(y)\,dy$$

ここで、$f(z-y)=\begin{cases}\frac{1}{\lambda}e^{-(z-y)/\lambda} & (z-y\geq 0\text{ のとき})\\ 0 & (\text{それ以外})\end{cases}$、$g(y)=\begin{cases}\frac{1}{\lambda}e^{-y/\lambda} & (y\geq 0\text{ のとき})\\ 0 & (\text{それ以外})\end{cases}$

なので、被積分関数が非ゼロとなるyの範囲は $0\leq y\leq z$ で、

$$p(z)=\int_0^z\frac{1}{\lambda}e^{-\frac{1}{\lambda}(z-y)}\cdot\frac{1}{\lambda}e^{-y/\lambda}dy=\int_0^z\frac{1}{\lambda^2}e^{-\frac{1}{\lambda}z}dy=\frac{z}{\lambda^2}e^{-\frac{1}{\lambda}z}$$

つまり、$p(z)=\begin{cases}\frac{1}{\lambda^2}ze^{-z/\lambda} & (z\geq 0)\\ 0 & (z<0)\end{cases}$ で、これは明らかに指数分布ではない。

30. (1) 問23. の結果を用いる. すなわち. $\bar{X} = E_X(X)$, $\bar{Y} = E_Y(Y)$ とおくとき,

$$Cov(X,Y) = E_{XY}(XY) - E_X(X)\cdot E_Y(Y) = E_{XY}\left[(X-\bar{X})(Y-\bar{Y})\right]$$

また, 問20の結果から. いま $E_X(X) = \mu_1$, $E_Y(Y) = \mu_2$ である.

$$\therefore Cov(X,Y) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(x-\mu_1)(y-\mu_2)\cdot K e^{-a(x-\mu_1)^2+2b(x-\mu_1)(y-\mu_2)-c(y-\mu_2)^2}dxdy$$

$x' = x-\mu_1$, $y' = y-\mu_2$ とおくと,

$$= K\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x'y' e^{-ax'^2+2bx'y'-cy'^2}dx'dy'$$

$$= K\int_{-\infty}^{\infty} x'e^{-ax'^2}\left\{\int_{-\infty}^{\infty} y'e^{2bx'y'-cy'^2}dy'\right\}dx'$$

$y'' = y' - \frac{b}{c}x'$ とおいた.

$$\{\ \} = \int_{-\infty}^{\infty} y'e^{-c(y'-\frac{b}{c}x')^2+\frac{b^2}{c}x'^2}dy' = e^{\frac{b^2}{c}x'^2}\int_{-\infty}^{\infty}\left(y''+\frac{b}{c}x'\right)e^{-cy''^2}dy''$$

$$= e^{\frac{b^2}{c}x'^2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{b}{c}x'e^{-cy''^2}dy'' = \frac{b}{c}x'e^{\frac{b^2}{c}x'^2}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-cy''^2}dy'' = \frac{b\sqrt{\pi}}{c\sqrt{c}}x'e^{\frac{b^2}{c}x'^2}$$

$$\therefore Cov(X,Y) = K\int_{-\infty}^{\infty}x'e^{-ax'^2}\cdot\frac{b\sqrt{\pi}}{c\sqrt{c}}x'e^{\frac{b^2}{c}x'^2}dx' = K\cdot\frac{b\sqrt{\pi}}{c\sqrt{c}}\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}x'^2e^{-(a-\frac{b^2}{c})x'^2}dx'}_{>0.}$$

ゆえに, 無相関 $\overset{}{\underset{def}{\Leftrightarrow}}$ $Cov(X,Y)=0 \Leftrightarrow b=0$

$$\Rightarrow f(x,y) = Ke^{-a(x-\mu_1)^2}\cdot e^{-c(y-\mu_2)^2} \underset{def}{\Leftrightarrow} X\text{ と }Y\text{ が独立.}$$

(2)

$$f(x,y) = K\exp\left[-(x-\mu_1,\ y-\mu_2)\begin{pmatrix} a & -b \\ -b & c\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x-\mu_1 \\ y-\mu_2\end{pmatrix}\right]$$ と表せる.

これを. $z = \begin{pmatrix} x-\mu_1 \\ y-\mu_2\end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} a & -b \\ -b & c\end{pmatrix}$ とおいて,

$$f(x,y) = Ke^{-z^TAz}$$

と表す. いま $|A| = ac-b^2>0$ で A は対称行列なので, 直交行列 U を用いて

$$A = U^T\Lambda U,\quad \Lambda = \begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2\end{pmatrix},\quad \lambda_1>0,\ \lambda_2>0$$

と対角化できる. これより, $Uz = (z_1, z_2)^T$ におくと,

$$f(x,y) = \tilde{f}(z_1,z_2) = Ke^{-z^TU^T\Lambda Uz} = Ke^{-(z_1,z_2)\begin{pmatrix}\lambda_1 & \\ & \lambda_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}z_1\\z_2\end{pmatrix}}$$

$$= Ke^{-\lambda_1z_1^2-\lambda_2z_2^2} = Ke^{-\lambda_1z_1^2}e^{-\lambda_2z_2^2}$$

これは z_1, z_2 が独立であることを意味する.