21. X と Y の確率分布表は次：

a>0, b>0 は投資額

Y \ X	4a	0	
2b	1/6	2/6	1/2
b/2	2/6	1/6	1/2
	1/2	1/2	

(1) $E_X(X) = 4a\cdot\frac{1}{2} + 0\cdot\frac{1}{2} = 2a$.　$E_Y(Y) = 2b\cdot\frac{1}{2} + \frac{b}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{5}{4}b$

$V_X(X) = E_X(X^2) - E_X(X)^2 = \left[16a^2\cdot\frac{1}{2} + 0^2\cdot\frac{1}{2}\right] - 4a^2 = 4a^2$

$V_Y(Y) = E_Y(Y^2) - E_Y(Y)^2 = \left[4b^2\cdot\frac{1}{2} + \frac{b^2}{4}\cdot\frac{1}{2}\right] - \frac{25}{16}b^2 = \frac{9}{16}b^2$

これらは、すべて「部分のみ知っている人」＝「周辺分布を知っている人」にとっての計算。

全分布を知っているとき、例えば $E_Y(Y) = 2b\cdot\frac{1}{6} + 2b\cdot\frac{2}{6} + \frac{b}{2}\cdot\frac{2}{6} + \frac{b}{2}\cdot\frac{1}{6}$

{X=4a, Y=2b}という事象　{X=0, Y=2b}という事象　{X=0, Y=$\frac{b}{2}$}という事象

{X=4a, Y=$\frac{b}{2}$}という事象

(2)

Z	4a+2b	4a+b/2	2b	b/2
P	1/6	2/6	2/6	1/6

$E_Z(Z) = (4a+2b)\cdot\frac{1}{6} + (4a+\frac{b}{2})\cdot\frac{2}{6} + 2b\cdot\frac{2}{6} + \frac{b}{2}\cdot\frac{1}{6} = 2a + \frac{5}{4}b$

$= E_X(X) + E_Y(Y)$.

(3) $Cov(X,Y) = E_{XY}(XY) - E_X(X)\cdot E_Y(Y)$

$= \left[8ab\cdot\frac{1}{6} + 2ab\cdot\frac{2}{6} + 0\cdot\frac{2}{6} + 0\cdot\frac{1}{6}\right] - 2a\cdot\frac{5}{4}b = -\frac{1}{2}ab < 0$.

{X=4a, Y=2b}という事象　{X=0, Y=2b}という事象.

（Xが大きな値をとればYは小さな値をとり、Xが小さな値をとればYは大きな値をとる、という傾向が強い）

あくまで傾向の話。XとYが両方とも大きな値をとることもある。

（相関が負なので、XとYは負に連動する。(Xが上がればYは下がり、Xが下がればYは上がる、という傾向が強い。)）

時系列を考えているわけではないので、こっちの表現の方が適切でした。

(4) $V_{XY}(X+Y) = V_X(X) + V_Y(Y) + 2Cov(X,Y) = 4a^2 + \frac{9}{16}b^2 - ab$

$= 4t^2 + \frac{9}{16}(1-t)^2 - t(1-t) = \frac{89}{16}\left[(t-\frac{17}{89})^2 + \frac{9}{89} - \frac{17^2}{89^2}\right]$

$\fallingdotseq \frac{89}{16}(t-\frac{17}{89})^2 + 0.36$　ここが最小。ゆえに、$t=\frac{17}{89}$ とすればリスクは最小。

$E(X+Y) = \frac{5}{4} + \frac{3}{4}t > 1$ なので、平均的にはもうかる。あとはリスクを下げればよい。

このとき、実際にZの分布表を書くとこうなる：

（つまり、(2)で $a=\frac{17}{89}$, $b=\frac{72}{89}$ とする）

Z	2.38	1.17	1.62	0.40
P	1/6	2/6	2/6	1/6

最大で2.38億円。これは $t=1$ とするときの最大値＝4億よりずいぶん小さい。

しかし、確率5/6でもうかる。

22.

$Y \backslash X$	x_1	x_2	
y_1	1/6	2/6	1/2
y_2	2/6	1/6	1/2
	1/2	1/2	

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{2}(x_1 + x_2)$$

$$\mathbb{E}(Y) = \frac{1}{2}(y_1 + y_2)$$

$$\mathbb{E}(XY) = x_1 y_1 \cdot \frac{1}{6} + x_1 y_2 \cdot \frac{2}{6} + x_2 y_1 \cdot \frac{2}{6} + x_2 y_2 \cdot \frac{1}{6}$$

$$\therefore \quad \mathrm{Cov}(X, Y) = \frac{1}{6}(x_1 y_1 + 2x_1 y_2 + 2x_2 y_1 + x_2 y_2) - \frac{1}{2}(x_1 + x_2) \cdot \frac{1}{2}(y_1 + y_2)$$

$$= \frac{1}{12}(2x_1 y_1 + 4x_1 y_2 + 4x_2 y_1 + 2x_2 y_2 - 3x_1 y_1 - 3x_1 y_2 - 3x_2 y_1 - 3x_2 y_2)$$

$$= \frac{1}{12}(-x_1 y_1 + x_1 y_2 + x_2 y_1 - x_2 y_2) = \frac{1}{12}(x_2 - x_1)(y_1 - y_2)$$

ゆえに $x_1 < x_2$, $y_1 < y_2$ のときは負の相関がある。とくに、X と Y が無相関となるのは、$x_1 = x_2$ または $y_1 = y_2$ のときのみ。つまり、X, Y の一方が確率変数でないときのみ。（つまり、例えば X は事象によらず同じ値をとる）、X と Y の間に特別な傾向はなくなる。

23. $$\mathbb{E}_{XY}[(X - \bar{X})(Y - \bar{Y})] = \mathbb{E}_{XY}[XY - X\bar{Y} - \bar{X}Y + \bar{X}\bar{Y}]$$

$$= \mathbb{E}_{XY}(XY) - \bar{Y}\,\mathbb{E}_{XY}(X) - \bar{X}\,\mathbb{E}_{XY}(Y) + \bar{X}\bar{Y}\,\mathbb{E}_{XY}(1)$$

$$= \mathbb{E}_{XY}(XY) - \bar{Y}\,\mathbb{E}_X(X) - \bar{X}\,\mathbb{E}_Y(Y) + \bar{X}\bar{Y}$$

$$= \mathbb{E}_{XY}(XY) - \bar{Y}\bar{X} - \bar{X}\bar{Y} + \bar{X}\bar{Y} = \mathbb{E}_{XY}(XY) - \bar{X}\bar{Y}$$

ゆえに、$\mathrm{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}_{XY}[(X - \bar{X})(Y - \bar{Y})]$.

次に、$\Delta X = X - \bar{X}$, $\Delta Y = Y - \Delta Y$ とおくと、$\mathrm{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}_{XY}(\Delta X \Delta Y)$ で、また、

$$\mathbb{V}_X(X) = \mathbb{E}_X[(X - \bar{X})^2] = \mathbb{E}_X(\Delta X^2) = \mathbb{E}_{XY}(\Delta X^2).$$

同様に、$\mathbb{V}_Y(Y) = \mathbb{E}_{XY}(\Delta Y^2)$. これより、$\mathbb{E}_{XY}(\cdot)$ を略して $\mathbb{E}(\cdot)$ と書けば、相関係数は

$$\rho = \frac{\mathbb{E}(\Delta X \cdot \Delta Y)}{\sqrt{\mathbb{E}(\Delta X^2) \cdot \mathbb{E}(\Delta Y^2)}}$$

一方、すべての t に対して $\mathbb{E}[(\Delta X + t\Delta Y)^2] \geq 0$ である。これを展開：

$$\mathbb{E}[\Delta X^2 + 2\Delta X \Delta Y \cdot t + \Delta Y^2 \cdot t^2] \geq 0$$

$$\longleftrightarrow \quad \mathbb{E}(\Delta Y^2)t^2 + 2\mathbb{E}(\Delta X \Delta Y)t + \mathbb{E}(\Delta X^2) \geq 0 \quad \forall t$$

これがすべての t に対して成立するので、2次方程式の判別式の条件より、

$$\mathbb{E}(\Delta X \Delta Y)^2 - \mathbb{E}(\Delta X^2) \cdot \mathbb{E}(\Delta Y^2) \leq 0. \qquad \therefore \rho^2 \leq 1 \Rightarrow -1 \leq \rho \leq 1$$

24. $p_Z(z_k) = \mathbb{P}(\{X+Y$ が z_k をとる$\})$ の分布

$= \mathbb{P}(\{X+Y=z_k\})$ と(形式的に)書いておく。このとき、

$$p_Z(z_k) = \mathbb{P}(\{X+Y=z_k\})$$

$$= \mathbb{P}_{XY}\left(\{X=z_k-y_1, Y=y_1\} \cup \{X=z_k-y_2, Y=y_2\} \cup \cdots \cdots \cup \{X=z_k-y_m, Y=y_m\}\right)$$

$$= \mathbb{P}_{XY}(\{X=z_k-y_1, Y=y_1\}) + \mathbb{P}_{XY}(\{X=z_k-y_2, Y=y_2\}) + \cdots + \mathbb{P}_{XY}(\{X=z_k-y_m, Y=y_m\}) \quad (\because \text{排反事象})$$

$$= \sum_{j=1}^{m} \mathbb{P}_{XY}(\{X=z_k-y_j, Y=y_j\})$$

$$= \sum_{j=1}^{m} p_{XY}(z_k-y_j, y_j)$$

いま、X と Y は独立であるので、定義より、$p_{XY}(x_i, y_j) = p_X(x_i)\cdot p_Y(y_j)$。ゆえに、

$$p_Z(z_k) = \sum_{j=1}^{m} p_X(z_k-y_j)\cdot p_Y(y_j)$$

次に、$p_X(x_i) = \dfrac{\lambda_1^i}{i!}e^{-\lambda_1}$, $p_Y(j) = \dfrac{\lambda_2^j}{j!}e^{-\lambda_2}$ の場合を考える。

$(i = 0, 1, 2, \cdots\cdots, +\infty)$.

たたみこみの式に代入すれば、

$$p_Z(k) = \sum_{j=0}^{\infty} p_X(k-j)\cdot p_Y(j)$$

$$= \sum_{j=0}^{k} p_X(k-j)\cdot p_Y(j) \quad (\because p_X(k-j) = \mathbb{P}(\{X=k-j\}) \text{ であるが、} X \text{ は非負の整数値のみとる。})$$

$$= \sum_{j=0}^{k} \frac{\lambda_1^{k-j}}{(k-j)!}e^{-\lambda_1}\cdot\frac{\lambda_2^{j}}{j!}e^{-\lambda_2}$$

$$= \frac{e^{-\lambda_1}e^{-\lambda_2}}{k!}\sum_{j=0}^{k}\frac{k!}{(k-j)!\,j!}\lambda_1^{k-j}\lambda_2^{j}$$

$$= \frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}{k!}(\lambda_1+\lambda_2)^k = P_o(z=k, \lambda_1+\lambda_2).$$

25. (i) 例えば、

$$\mathbb{P}(\{S_2=0\}) = \mathbb{P}(\{表が1回, 裏が1回\})$$
$$= \mathbb{P}(\{X_1 = x, X_2 = -x\} \cup \{X_1 = -x, X_2 = x\})$$
$$= \mathbb{P}(\{X_1 = x, X_2 = -x\}) + \mathbb{P}(\{X_1 = -x, X_2 = x\})$$
$$= \mathbb{P}(\{X_1 = x\}) \cdot \mathbb{P}(\{X_2 = -x\}) + \mathbb{P}(\{X_1 = -x\}) \cdot \mathbb{P}(\{X_2 = x\})$$
$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{2}{4}$$

以上より、確率分布は右のとおり：

S_2	$-x$	0	x
$\mathbb{P}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{1}{4}$

$\therefore$ $\mathbb{E}(S_2) = 0$, $\quad V(S_2) = x^2 \cdot \frac{1}{4} + x^2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{x^2}{2}$

(ii) 例えば、

$$\mathbb{P}(\{S_3 = \frac{x}{3}\}) = \mathbb{P}(\{表が2回, 裏が1回\})$$
$$= \underbrace{{}_3C_2}_{表表裏,\ 表裏表,\ 裏表表\ の3通り} \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{8}$$

以上より、確率分布は右：

S_3	$-x$	$-\frac{x}{3}$	$\frac{x}{3}$	x
$\mathbb{P}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

$\therefore$ $\mathbb{E}(S_3) = 0$, $\quad V(S_3) = \mathbb{E}(S_3^2) - \mathbb{E}(S_3)^2 = x^2 \cdot \frac{1}{8} \cdot 2 + \frac{x^2}{9} \cdot \frac{3}{8} \cdot 2 = \frac{x^2}{3}$

(iii) 同様にして、右表のとおり：

S_4	$-x$	$-\frac{x}{2}$	0	$\frac{x}{2}$	x
$\mathbb{P}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{6}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{1}{16}$

$\therefore$ $\mathbb{E}(S_4) = 0$, $\quad V(S_4) = \mathbb{E}(S_4^2) - \mathbb{E}(S_4)^2 = \frac{x^4}{4}$

(iv) 一般の場合、以上の証拠から $S_n := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ について、$\mathbb{E}(S_n) = 0$, $V(S_n) = \frac{x^2}{n}$ と予想される。これは、特に $n \to +\infty$ とすれば $V(S_n) \to 0$ となり「分散ゼロ」、つまり、S_n は確率 1 で 0 をとる。これはうつくしい表現で、$\mathbb{P}(\{S_n \to \mathbb{E}(S_n)\}) = 1$ と表せる。