

$$16. (1) P_{AB}(A_1 \cap B_1) = P_{AB}(\{2, 4, 6 \text{ が出た場合}\} \cap \{1, 2, 3 \text{ が出た場合}\}) \\ = P_{AB}(\{2 \text{ が出た場合}\}) = \frac{1}{6}$$

同様に、右表を得る。

② ③ 部分で

$$P_A(A_1) = P_{AB}(A_1 \cap B_1) + P_{AB}(A_1 \cap B_2) \\ = \frac{1}{2}$$

$\mathcal{F}_B \backslash \mathcal{F}_A$	A_1	A_2	
B_1	$1/6$	$2/6$	$1/2$
B_2	$2/6$	$1/6$	$1/2$
	$1/2$	$1/2$	

なぜのよう求める。明らかに $P_{AB}(A_1 \cap B_1) \neq P_A(A_1) \cdot P_B(B_1)$ であり、 $\mathcal{F}_A$ と $\mathcal{F}_B$ は独立ではない。

$$(2) P_{AB}(A_1 \cap B_1) = P_{AB}(\{2, 4, 6 \text{ が出た場合}\} \cap \{1, 2, 3, 5 \text{ が出た場合}\}) \\ = P_{AB}(\{2 \text{ が出た場合}\}) = \frac{1}{6}$$

同様に、右表を得る。明らかに、 $\mathcal{F}_A$ と

$\mathcal{F}_B$ は独立ではない。

$\mathcal{F}_B \backslash \mathcal{F}_A$	A_1	A_2	
B_1	$1/6$	$3/6$	$2/3$
B_2	$2/6$	0	$1/3$
	$1/2$	$1/2$	

$$17. (1) P_{AB}(A_1 \cap B_2) = \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot 3 \quad \left(= (1 \text{ 回目, 偶数の目が出る}) \right. \\ \left. \times (2 \text{ 回目, 3, 4, 5, 6 の目が出る}) \times (偶数回通り) \right) \\ = \frac{5}{12}$$

同様に、右表を得る。2 場合、

1 回目、2 回目

$$P_{AB}(A_i \cap B_j) = P_A(A_i) \cdot P_B(B_j)$$

1 回目、2 回目、 $\mathcal{F}_A$ と $\mathcal{F}_B$ は独立。

$\mathcal{F}_B \backslash \mathcal{F}_A$	A_1	A_2	
B_1	$1/12$	$1/12$	$1/6$
B_2	$5/12$	$5/12$	$5/6$
	$1/2$	$1/2$	

$$(2) P_{AB}(A_2 \cap B_1) = \frac{1}{6} \cdot 1 + \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{2}{9}$$

1 回目、1 回目
2 回目は何でも OK.
1 回目、3 or 5 回目出る 2 回目は何でも OK.

$\mathcal{F}_B \backslash \mathcal{F}_A$	A_1	A_2	
B_1	$1/12$	$2/9$	$11/36$
B_2	$5/12$	$5/18$	$25/36$
	$1/2$	$1/2$	

明らかに、独立ではない。

18. 6の約数は $1, 2, 3, 6$ と 7 . $p_1 = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$.

$$p_n = P(\{n\text{回中, } 1, 2, 3, 6 \text{ は奇数回現れる}\})$$

$$= P(\{n\text{回中, } 1, 2, 3, 6 \text{ は奇数回}\} \cap \{n\text{回目が } 1, 2, 3, 6 \text{ のいずれか}\})$$

$$+ P(\{n\text{回中, } 1, 2, 3, 6 \text{ は奇数回}\} \cap \{n\text{回目が } 4, 5 \text{ のいずれか}\})$$

$$= P(\{n-1\text{回中, } 1, 2, 3, 6 \text{ は偶数回}\} \cap \{n\text{回目が } 1, 2, 3, 6 \text{ のいずれか}\})$$

$$+ P(\{n-1\text{回中, } 1, 2, 3, 6 \text{ は奇数回}\} \cap \{n\text{回目が } 4, 5 \text{ のいずれか}\})$$

$$= (1 - p_{n-1}) \cdot \frac{4}{6} + p_{n-1} \cdot \frac{2}{6}$$

$$\therefore p_n = -\frac{1}{3}p_{n-1} + \frac{2}{3}, \quad p_1 = \frac{2}{3}$$

独立

A, B が独立事象とき, $P(A \cap B) = P(A)P(B)$

$$\therefore p_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{3}\right)^n \rightarrow \frac{1}{2}$$

$$P(A) = P(A \cap B_1) + \dots + P(A \cap B_m)$$

(ただし, $B_1, \dots, B_m$ は互いに排反な, かつ

$B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_m = \Omega$
: 全事象)

19.

$$p_n = P(\{点Pが座標nにある\})$$

$$= P(\{Pがnにある\} \cap \{3の直前の時点2, Pがn-1にある\})$$

$$+ P(\{Pがnにある\} \cap \{3の直前の時点2, Pがn-2にある\})$$

$$= P(\{Pがn-1からnへ移動する\} \cap \{Pがn-1にある\})$$

$$+ P(\{Pがn-2からnへ移動する\} \cap \{Pがn-2にある\})$$

$$= P(\{Pが1区画, 2へ移動する\} \cap \{Pがn-1にある\})$$

$$+ P(\{Pが2区画, 2へ移動する\} \cap \{Pがn-2にある\})$$

$$= P(\{Pが1区画, 2へ移動する\}) \cdot P(\{Pがn-1にある\})$$

$$+ P(\{Pが2区画, 2へ移動する\}) \cdot P(\{Pがn-2にある\})$$

$$= \frac{1}{2}p_{n-1} + \frac{1}{2}p_{n-2}$$

自明な
等式...
独立性.

また, $p_0 = 1, p_1 = \frac{1}{2}$ である. 次の2式を得る:

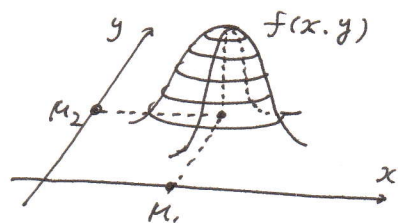
$$\begin{cases} p_n + \frac{1}{2}p_{n-1} = p_{n-1} + \frac{1}{2}p_{n-2} = \dots = p_1 + \frac{1}{2}p_0 = 1 \\ p_n - p_{n-1} = -\frac{1}{2}(p_{n-1} - p_{n-2}) = \left(-\frac{1}{2}\right)^2(p_{n-2} - p_{n-3}) = \dots = \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}(p_1 - p_0) = \left(-\frac{1}{2}\right)^n \end{cases}$$

$$p_2 \text{ に } p_{n-1} \text{ を代入して, } p_n = \frac{2}{3} + \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n \rightarrow \frac{2}{3}$$

20.

(1) $\exp[\dots\dots]$ の中身は a, b, c を定める.

$$\begin{aligned} \exp \text{の中身} &= -a \left[(x-\mu_1)^2 - \frac{2b}{a} (x-\mu_1)(y-\mu_2) \right] - c(y-\mu_2)^2 \\ &= -a \left[(x-\mu_1) - \frac{b}{a} (y-\mu_2) \right]^2 + \left(\frac{b^2}{a} - c \right) (y-\mu_2)^2 \end{aligned}$$



ゆえに, $f(x, y) = K e^{-a(\text{正の数}) - (c - \frac{b^2}{a})(\text{正の数})}$ より, $a > 0, c - \frac{b^2}{a} > 0$.

つまり, $a > 0, c > 0, ac - b^2 > 0$ の条件.

(正の数) の部分は $x, y \rightarrow \pm\infty$ で発散する.

$$\begin{aligned} (2) \quad p_X(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy = K e^{-a(x-\mu_1)^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{2b(x-\mu_1)(y-\mu_2) - c(y-\mu_2)^2} dy \\ &= K e^{-a(x-\mu_1)^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{2b(x-\mu_1)y' - cy'^2} dy' \quad (y' = y - \mu_2 \text{ とおく}) \\ &= K e^{-a(x-\mu_1)^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-c[y' - \frac{b}{c}(x-\mu_1)]^2 + \frac{b^2}{c}(x-\mu_1)^2} dy' \\ &= K e^{-(a - \frac{b^2}{c})(x-\mu_1)^2} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-c[y' - \frac{b}{c}(x-\mu_1)]^2} dy'}_{\text{定数}} = K' e^{-(a - \frac{b^2}{c})(x-\mu_1)^2} \\ &= K' e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu_1)^2} \end{aligned}$$

ゆえに X は正規分布 平均 $= \mu_1$, 分散 $= \sigma^2 = \frac{1}{2(a - \frac{b^2}{c})} = \frac{c}{2(ac - b^2)}$ の正規分布.

Y も正規分布.