11. (1) X_1 を、得られる金額に対応する確率変数とする.

$$\mathbb{E}(X_1) = 10 \times \frac{6}{10} + 100 \times \frac{3}{10} + 1000 \times \frac{1}{10} = 136$$

$$\mathbb{V}(X_1) = (136-10)^2 \cdot \frac{6}{10} + (136-100)^2 \cdot \frac{3}{10} + (136-1000)^2 \cdot \frac{1}{10} = 84{,}564$$

ゆえに 平均 = 136 (円), 標準偏差 = $\sqrt{\mathbb{V}(X_1)}$ = 291 (円)

(2) X_2 を、得られる金額に対応する確率変数とする.

$$\mathbb{E}(X_2) = 120 \times \frac{6}{10} + 150 \times \frac{3}{10} + 190 \times \frac{1}{10} = 136$$

$$\mathbb{V}(X_2) = (136-120)^2 \cdot \frac{6}{10} + (136-150)^2 \cdot \frac{3}{10} + (136-190)^2 \cdot \frac{1}{10} = 504$$

ゆえに 平均 = 136 (円), 標準偏差 = $\sqrt{\mathbb{V}(X_2)}$ = 22 (円)

---

12. (1) $e^{\lambda} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!}$ の両辺をλで微分すると, $e^{\lambda} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k\lambda^{k-1}}{k!}$ $\xrightarrow{\lambda をかける}$ $\therefore \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot \frac{\lambda^k}{k!} = \lambda e^{\lambda}$ ②

これより, $e^{-\lambda}$ を両辺にかければ $\sum_{k=0}^{\infty} k \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = \lambda$ を得る.

(つまり, $E(X) = \lambda$ … 問9の結果と一致).

③ を再度 λ で微分: $\sum_{k=0}^{\infty} k^2 \frac{\lambda^{k-1}}{k!} = e^{\lambda} + \lambda e^{\lambda}$ $\therefore \sum_{k=0}^{\infty} k^2 \cdot \frac{\lambda^k}{k!} = \lambda(1+\lambda)e^{\lambda}$

$\therefore$ $E(X^2) = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 \cdot \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = \lambda + \lambda^2$ $\therefore$ $\underline{\mathbb{V} = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = \lambda.}$

∴ Poisson分布では 平均 = 分散 = λ

---

(2) $\mathbb{E}(X) = \sum_{k=0}^{N} k \cdot {}_N C_k \, p^k q^{N-k}$ と $\mathbb{E}(X^2) = \sum_{k=0}^{N} k^2 \, {}_N C_k \, p^k q^{N-k}$ を計算したい.

$\sum_{k=0}^{N} {}_N C_k (pt)^k q^{N-k} = (pt+q)^N$ を t で微分すると,

$$\sum_{k=0}^{N} {}_N C_k \, p^k q^{N-k} \cdot k t^{k-1} = N(pt+q)^{N-1} \cdot p \quad -①$$

$t=1$ を代入すると, $p+q=1$ より, $\sum_{k=0}^{N} {}_N C_k \, p^k q^{N-k} \cdot k = Np$ $\quad \underline{\therefore \mathbb{E}(X) = Np}$

① に t をかける: $\sum_{k=0}^{N} {}_N C_k \, p^k q^{N-k} k t^k = Np(pt+q)^{N-1} \cdot t$

これを t で微分すると, $\sum_{k=0}^{N} {}_N C_k \, p^k q^{N-k} k^2 e^{k-1} = Np(pt+q)^{N-2} \cdot (N-1) \cdot pt + Np(pt+q)^{N-1} \cdot 1.$

ゆえに, $t=1$ を代入すれば

$$\sum_{k=0}^{N} {}_N C_k \, p^k q^{N-k} k^2 = Np(N-1)p + Np = N^2p^2 - Np^2 + Np$$

$$\therefore \mathbb{V} = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = N^2p^2 - Np^2 + Np - (Np)^2 = Np(1-p)$$

$Np = \lambda$ を固定し $p \to +0$ とすれば, $\underline{\mathbb{E}(X) \to Np = \lambda, \quad \mathbb{V} \to \lambda(1-0) = \lambda.}$

これは poisson 分布の平均&分散.

13.

(1)

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x\, p(x)\, dx = \int_0^{\infty} x \cdot \frac{1}{\lambda} e^{-\frac{1}{\lambda}x}\, dx$$

$$= \int_0^{\infty} \frac{1}{\lambda} x \left(-\lambda e^{-\frac{1}{\lambda}x}\right)' dx = \left[-x e^{-\frac{1}{\lambda}x}\right]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} -e^{-\frac{1}{\lambda}x}\, dx$$

$$= \int_0^{\infty} e^{-\frac{1}{\lambda}x}\, dx = -\lambda e^{-\frac{1}{\lambda}x}\Big|_0^{\infty} = \lambda$$

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 p(x)\, dx = \int_0^{\infty} x^2 \cdot \frac{1}{\lambda} e^{-\frac{1}{\lambda}x}\, dx = \int_0^{\infty} x^2 \left(-e^{-\frac{1}{\lambda}x}\right)' dx$$

$$= -2x e^{-\frac{1}{\lambda}x}\Big|_0^{\infty} + \int_0^{\infty} 2x e^{-\frac{1}{\lambda}x}\, dx = \int_0^{\infty} 2x \left(-\lambda e^{-\frac{1}{\lambda}x}\right)' dx = 2\lambda^2$$

$$\therefore V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = 2\lambda^2 - \lambda^2 = \lambda^2$$

(2)

$$P(\{[\bar{x}, +\infty) \text{に値をとる}\}) = \int_{\bar{x}}^{\infty} p(x)\, dx = \int_{\lambda}^{\infty} \frac{1}{\lambda} e^{-\frac{1}{\lambda}x}\, dx$$

$$= -e^{-\frac{1}{\lambda}x}\Big|_{\lambda}^{\infty} = e^{-1} \fallingdotseq 0.368$$

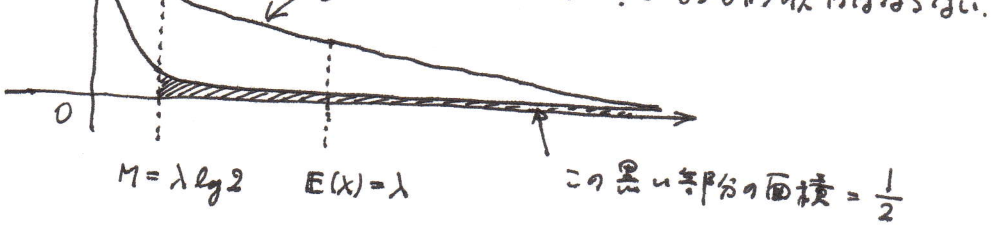
ゆえに、$P(\{(-\infty, \bar{x}] \text{に値をとる}\}) \fallingdotseq 0.632$ となり、平均値まわりで、対称ではない。（63%の確率で、平均値より小さい値が出る。）これは、平均値を大きく上回る値がまれに現れるために起こる現象である。

(3) 定義より、

$$\int_0^{M} \frac{1}{\lambda} e^{-\frac{1}{\lambda}x}\, dx = \frac{1}{2} \iff -\lambda e^{-\frac{1}{\lambda}x}\Big|_0^{M} = \frac{\lambda}{2}$$

$$\iff -\lambda e^{-\frac{M}{\lambda}} + \lambda = \frac{\lambda}{2} \iff e^{-M/\lambda} = \frac{1}{2} \qquad \therefore M = \lambda \cdot \log 2 \fallingdotseq 0.3\lambda$$

つまり、メジアンは平均値 $= \lambda$ の 0.3倍の位置にある。



14. $\mathbb{E}(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2} dx$ で、$y = x - \mu$ とおくと、

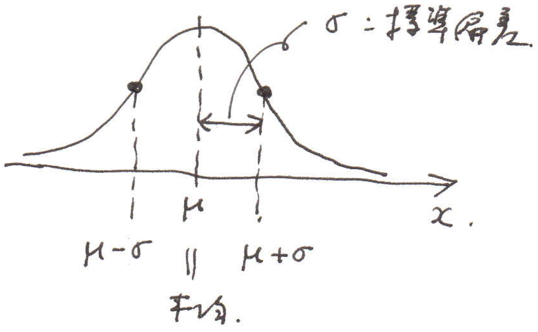
$$\mathbb{E}(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} (y+\mu)^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}y^2} dy = \int_{-\infty}^{\infty} y^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}y^2} dy + \mu^2$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} y \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \left(-\sigma^2 e^{-\frac{1}{2\sigma^2}y^2}\right)' dy + \mu^2 \quad \left(\int_{-\infty}^{\infty} y \times e^{-y^2} dy = 0\right)$$

$$= \frac{-\sigma^2}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \underset{(-\sigma^2)}{y} \cdot e^{-\frac{1}{2\sigma^2}y^2} \Big|_{-\infty}^{\infty} + \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{\infty} \sigma^2 e^{-\frac{1}{2\sigma^2}y^2} dy + \mu^2 = \sigma^2 + \mu^2$$

$$\therefore \quad \mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = \sigma^2 + \mu^2 - \mu^2 = \sigma^2$$

結局、正規分布 $p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2}$ は平均 μ、分散 σ^2 を与える。これを $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ で表す。とくに $\mathcal{N}(0, 1)$ は標準正規分布と呼ばれる。



$\bar{X} := \mathbb{E}(X)$

15. $|x_i - \bar{X}| \geq \varepsilon$ をみたす i の集合を $I(\varepsilon)$ とおく。

$\varepsilon = 0$ であれば、すべての x_i が $|x_i - \bar{X}| \geq 0$ をみたすので、$I(0) = \{1, 2, 3, \cdots\}$

$\varepsilon = 1$ に対して、x_1, x_3, x_5, x_{10} が $|x_i - \bar{X}| \geq 1$ をみたすなら $I(1) = \{1, 3, 5, 10\}$

このとき、

要素は全部で N こあるとした。

$$\mathbb{V}(X) = \sum_{k=1}^{N} (x_k - \bar{X})^2 p_k = \sum_{k \in I(0)} (x_k - \bar{X})^2 p_k$$

$$\geq \sum_{k \in I(\varepsilon)} (x_k - \bar{X})^2 p_k \qquad (\because \ I(\varepsilon) \subseteq I(0))$$

$$\geq \sum_{k \in I(\varepsilon)} \varepsilon^2 p_k$$

$(\because$ $k \in I(\varepsilon)$ である x_k は $|x_k - \bar{X}| \geq \varepsilon$ をみたす$)$

$$= \varepsilon^2 \sum_{k \in I(\varepsilon)} p_k$$

$$= \varepsilon^2 \mathbb{P}\left(\{\omega_k \,;\, |x_k - \bar{X}| \geq \varepsilon\}\right)$$

$$\therefore \mathbb{P}\left(\{|X(\omega_k) - \bar{X}| \geq \varepsilon \text{ をみたす } \omega_k\}\right) \leq \frac{\mathbb{V}(X)}{\varepsilon^2}$$