6. (1)

$\mathcal{F}'$	{10}	{20}	{30}	{40}	{50}	{60}	{70}	{80}	{90}	{100}	
$f(X)$	15	30	45	60	75	90	100	100	100	100	
$\mathbb{P}$	2	5	7	12	20	25	18	7	3	1	(%)

$\mathcal{G}'$	{15}	{30}	{45}	{60}	{75}	{90}	{100}	
Y	15	30	45	60	75	90	100	
$\mathbb{Q}$	2	5	7	12	20	25	29	(%)

(2)

$\mathcal{F}'$	{10}	{20}	{30}	{40}	{50}	{60}	{70}	{80}	{90}	{100}	
$f(X)$	20	30	40	50	60	70	80	90	100	100	
$\mathbb{P}$	2	5	7	12	20	25	18	7	3	1	(%)

$\mathcal{G}'$	{20}	{30}	{40}	{50}	{60}	{70}	{80}	{90}	{100}
Y	20	30	40	50	60	70	80	90	100
$\mathbb{Q}$	2	5	7	12	20	25	18	7	4

7. $\mathbb{Q}(\{Y$が$[y, y+\Delta y]$に値をとる$\}) = q(y)\Delta y$ となる $q(y)$ を求めればよい.

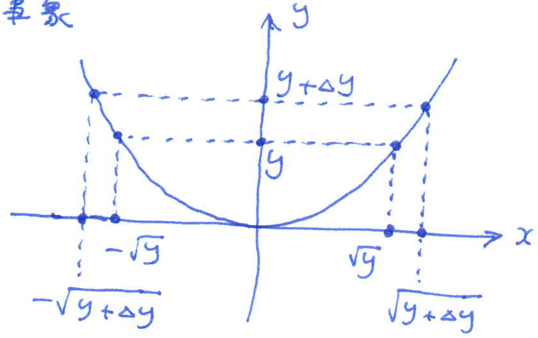
一方, いま $\mathbb{P}(\{X$が$[x, x+\Delta x]$に値をとる$\}) = p(x)\Delta x$ である. これらを結び付ける.

$\mathbb{Q}(\{Y$が$[y, y+\Delta y]$に値をとる$\}) = \mathbb{P}(\{X^2$が$[y, y+\Delta y]$に値をとる$\})$

$= \mathbb{P}(\{X$が$[-\sqrt{y+\Delta y}, -\sqrt{y}]$に値をとる$\}) + \mathbb{P}(\{X$が$[\sqrt{y}, \sqrt{y+\Delta y}]$に値をとる$\})$

明らかに確率は同じ値.

排反事象



$= 2\,\mathbb{P}(\{X$が$[\sqrt{y}, \sqrt{y+\Delta y}]$に値をとる$\})$

ここで $f(x)=\sqrt{x}$ のテーラー展開より, ε:小数 にたいして

$f(x+\varepsilon) = f(x) + f'(x)\varepsilon + \cdots$

なので $\sqrt{x+\varepsilon} \fallingdotseq \sqrt{x} + \dfrac{\varepsilon}{2\sqrt{x}}$ ゆえに $\sqrt{y+\Delta y} \fallingdotseq \sqrt{y} + \dfrac{\Delta y}{2\sqrt{y}}$

$\therefore\ = 2\,\mathbb{P}(\{X$が$[\underset{x}{\sqrt{y}}, \underset{x}{\sqrt{y}} + \underset{\Delta x}{\frac{1}{2\sqrt{y}}\Delta y}]$に値をとる$\}) = \underbrace{2p(\sqrt{y})\cdot\frac{1}{2\sqrt{y}}\Delta y}$

これが $q(y)$.

$$\therefore\ q(y) = 2p(\sqrt{y})\cdot\frac{1}{2\sqrt{y}} = \frac{1}{\sqrt{y}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}(\sqrt{y})^2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi y}}e^{-\frac{y}{2}}$$

8. (1) ${}_{10}C_6 \cdot {}_4C_3 \cdot \left(\frac{6}{10}\right)^6 \cdot \left(\frac{3}{10}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^1 \fallingdotseq 0.11$

(2) ${}_{10}C_5 \cdot {}_5C_3 \cdot \left(\frac{6}{10}\right)^5 \cdot \left(\frac{3}{10}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^2 \fallingdotseq 0.05$

9 (1) $E(X) = \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot P_o(k, \lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$

$= e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^k}{(k-1)!} = e^{-\lambda} \cdot \lambda \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = e^{-\lambda} \cdot \lambda \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} \lambda e^{\lambda} = \lambda$

(2) $E(X) = \sum_{k=0}^{N} k \cdot {}_NC_k \, p^k q^{N-k}$ を計算したい.

2項展開: $\sum_{k=0}^{N} {}_NC_k (pt)^k q^{N-k} = (pt+q)^N$ の両辺をtで微分:

$\sum_{k=0}^{N} {}_NC_k \, p^k q^{N-k} \cdot k t^{k-1} = N(pt+q)^{N-1} \cdot p$

$t=1$ を代入すると, $\sum_{k=0}^{N} {}_NC_k \, p^k q^{N-k} \cdot k = N(p+q)^{N-1} \cdot p$

$p+q=1$ より, $E(X) = \sum_{k=0}^{N} k \cdot {}_NC_k \, p^k q^{N-k} = Np$

10. $E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \, p(x) \, dx = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2} dx$

$x-\mu = y$ とおくと, $y: -\infty \to +\infty$ で, $dx = dy$ より.

$= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{\infty} (y+\mu) e^{-\frac{1}{2\sigma^2}y^2} dy = \mu \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}y^2} dy = \mu$

$\int_{-\infty}^{\infty}$ (奇関数) × (偶関数) $dy = 0$

正規分布の正規化条件.