45. $$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} S(\omega)e^{i\omega k}d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sum_{\ell=-\infty}^{\infty} R_\ell e^{-i\omega\ell}\, e^{i\omega k}d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi}\sum_{\ell=-\infty}^{\infty} R_\ell \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\omega(k-\ell)}d\omega = \frac{1}{2\pi}\sum_{\substack{\ell=-\infty\\ \ell\neq k}}^{\infty} R_\ell \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\omega(k-\ell)}d\omega + \underbrace{\frac{1}{2\pi}R_k\int_{-\pi}^{\pi}d\omega}_{\ell=k\text{としたの項}}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\sum_{\substack{\ell=-\infty\\ \ell\neq k}}^{\infty} R_\ell \cdot \left.\frac{e^{i\omega(k-\ell)}}{i(k-\ell)}\right|_{-\pi}^{\pi} + R_k$$

オイラーの公式: $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$

$$= \frac{1}{2\pi}\sum_{\substack{\ell=-\infty\\ \ell\neq k}}^{\infty} R_\ell \cdot \frac{2\sin((k-\ell)\pi)}{(k-\ell)} + R_k = R_k$$

46. $R_{-k} = Cov(X_n, X_{n-k})$ で、$n-k=m$ とおくと、X_m は定常過程なので、

$$R_{-k} = Cov(X_{m+k}, X_m) = R_k$$

$S(-\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} R_k e^{i\omega k}$ で、$k=-\ell$ とおくと、$R_\ell = R_{-\ell}$ なので、

$$S(-\omega) = \sum_{\ell=\infty}^{-\infty} R_{-\ell}e^{-i\omega\ell} = \underbrace{\sum_{\ell=\infty}^{-\infty} R_\ell e^{-i\omega\ell} = \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} R_\ell e^{-i\omega\ell}}_{\text{単なる並べかえ}} = S(\omega).$$

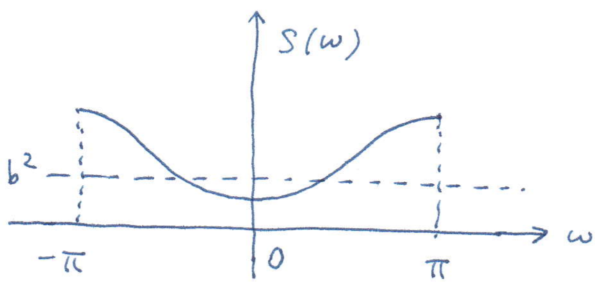
47. $$S(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} R_k e^{-i\omega k} = R_0 + \sum_{k=-\infty}^{-1} R_k e^{-i\omega k} + \sum_{k=1}^{\infty} R_k e^{-i\omega k}$$

$$= R_0 + \sum_{k=1}^{\infty} R_k e^{i\omega k} + \sum_{k=1}^{\infty} R_k e^{-i\omega k} = \frac{b^2}{1-a^2} + \frac{b^2}{1-a^2}\sum_{k=1}^{\infty} a^k e^{i\omega k} + \frac{b^2}{1-a^2}\sum_{k=1}^{\infty} a^k e^{-i\omega k}$$

ここで、$T_n = \sum_{k=1}^{n} a^k e^{i\omega k} = \sum_{k=1}^{n}(ae^{i\omega})^k = ae^{i\omega}\cdot\frac{1-(ae^{i\omega})^n}{1-ae^{i\omega}} \xrightarrow[(n\to\infty)]{} \frac{ae^{i\omega}}{1-ae^{i\omega}}$ なので、

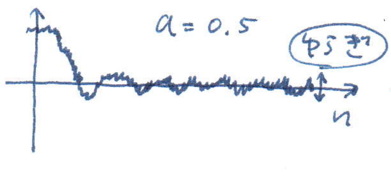
$$S(\omega) = \frac{b^2}{1-a^2} + \frac{b^2}{1-a^2}\cdot\frac{ae^{i\omega}}{1-ae^{i\omega}} + \frac{b^2}{1-a^2}\cdot\frac{ae^{-i\omega}}{1-ae^{-i\omega}} = \frac{b^2}{1-2a\cos\omega + a^2}$$

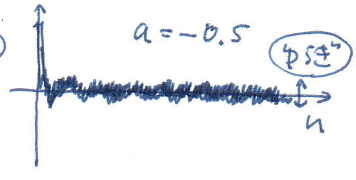
$-1 < a \leq 0$ のときの $S(\omega)$ の概形は下図:



$$\begin{cases} S(0) = \dfrac{b^2}{(1-a)^2} < b^2 \\ S(\pm\pi) = \dfrac{b^2}{(1+a)^2} > b^2 \end{cases}$$

つまり、定常状態における X_n の振るまいは、高周波成分が多く含まれていて、低周波成分はあまり含まれていない。





定常状態では、aが正でも負でも、そのゆらぎは $\sigma_\infty^2 = \frac{b^2}{1-a^2}$ で共通だが、aが負のときの方が激しく振動している。

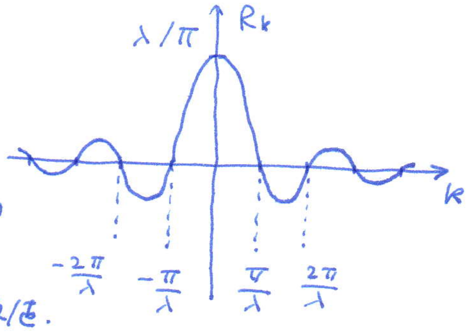
48. $R_k = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} S(\omega)e^{i\omega k}d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\lambda}^{\lambda} 1\cdot e^{i\omega k}d\omega$

$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\lambda}^{\lambda}(\cos\omega k + i\sin\omega k)d\omega = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{\sin\omega k}{k} + \frac{-i\cos\omega k}{k}\right]_{-\lambda}^{\lambda}$

$= \frac{1}{2\pi k}\cdot\sin\lambda k\cdot 2 = \frac{\sin\lambda k}{\pi k}$

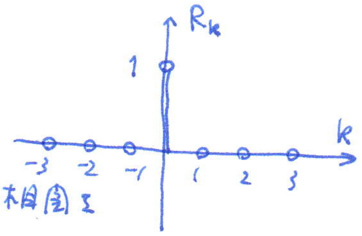
$R_k = \frac{\sin\lambda k}{\lambda k}\cdot\frac{\lambda}{\pi} \underset{(k\to 0)}{\to} \frac{\lambda}{\pi}$ より, R_kの概形は右図:

($\lambda k = m\pi$ となるkで $R_k = 0$)



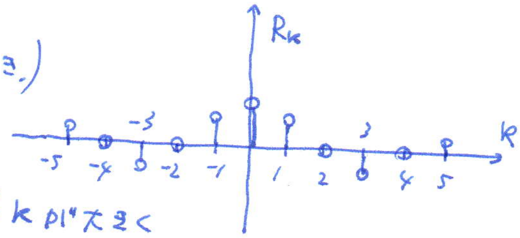
注意: kは実際は整数値.

($\lambda = \pi$ のとき)



自分自身とだけ相関をもつ白色ノイズW_n.

($\lambda = \frac{\pi}{2}$ のとき)



時間間隔kが大きくなるにつれて相関は弱まるが, 持続する.

49. (玉を1個取り出す場合)

・ $P(H_1|赤) = \frac{P(赤|H_1)\cdot P(H_1)}{P(赤)} = \frac{P(赤|H_1)\cdot P(H_1)}{P(赤\cap H_1) + P(赤\cap H_2)}$

$= \frac{P(赤|H_1)\cdot P(H_1)}{P(赤|H_1)\cdot P(H_1) + P(赤|H_2)\cdot P(H_2)} = \frac{\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}}{\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2} + \frac{2}{4}\cdot\frac{1}{2}} = \frac{3}{5}$

・ $P(H_2|赤) = 1 - \frac{3}{5} = \frac{2}{5}$

(玉を2個取り出す場合)

$P(H_1) = \frac{1}{2}$

・ $P(H_1|赤,赤) = \frac{P(赤,赤|H_1)\cdot P(H_1)}{P(赤,赤|H_1)\cdot P(H_1) + P(赤,赤|H_2)\cdot P(H_2)} = \frac{\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}}{\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2} + \frac{2}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}}$

$= \frac{3}{4}$

・ $P(H_2|赤,赤) = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$

ゆえに, 当然, 赤玉が2個出れば 2つのつぼを区別できる確率が上がる. (選んだつぼが H_1 であると結論付けられる確率が $\frac{3}{5}$ から $\frac{3}{4}$ に上昇する.)