

41. 1次元ガウス過程を考える. すなわち, 時間に依存する確率変数 X_n が $X_n = aX_{n-1} + bW_n$ なる規則によって生成されている (ただし, $-1 < a < 1$). ここで, $W_1, W_2, \dots$ は互いに独立で, 時刻によらず (平均 0, 分散 1 の) 標準正規分布 $\mathcal{N}(0, 1)$ に従う. 初期値 X_0 は $W_1, W_2, \dots$ と独立で, 正規分布 $\mathcal{N}(\mu_0, \sigma_0^2)$ に従う. X_n の一般項を求めよ. また, それを基に, X_n の平均 $\mathbf{E}_{X_n}(X_n)$ と分散 $\mathbf{V}_{X_n}(X_n)$ を計算せよ.

42. 問題 41 で考察したガウス過程を考える. $\sigma_n^2 = \mathbf{V}_{X_n}(X_n)$ の解の表現を用いて, ガウス過程が「拡散過程」: $\sigma_{n-1}^2 < \sigma_n^2$ となるための条件を求めよ. 同様に, ガウス過程が「収縮過程」: $\sigma_{n-1}^2 > \sigma_n^2$ となるための条件を求め, それがいかなる状況に対応しているかを考察せよ.

43. 一般に, 系の不確かさ, あるいはランダムネスを測る尺度として「エントロピー」が知られている. とくに, 確率密度関数が $p(x)$ で与えられる連続確率変数 X についてのエントロピーは次式で定義される.

$$H = - \int_{-\infty}^{\infty} p(x) \log p(x) dx$$

$p(x)$ が正規分布 $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ の確率密度関数であるとき, 対応するエントロピーを計算せよ. その上で, 問題 42 で考察した拡散過程が, エントロピー非減少の法則の一つの表現となっていることを確認せよ.

44. 問題 41 で考察したガウス過程を考える. このとき, 異なる時刻 n, m における変数 X_n, X_m の共分散 $\text{Cov}(X_n, X_m) = \mathbf{E}_{X_n, X_m}(X_n X_m) - \mathbf{E}_{X_n}(X_n) \mathbf{E}_{X_m}(X_m)$ を計算し, X_n と X_m の関連を調べよ. 計算に当たって, 問題 40 で求めた X_n の一般項を利用せよ.

45. 問題 41 で考察したガウス過程のシミュレーションは, MATLAB あるいはその簡易版である Octave で容易に実行できる. そして, そのコードは以下の通りである.

```
a=0.9;
b=1;
x=10;
X=[];
for n=1:200
    x = a*x + b*randn(1,1);
    X=[X,x];
end
plot(X)
hold on
```

各行の意味を考え, 実行してみよ. 例えば, 下図のようなグラフが得られる. パラメータを色々変えてみて (とくに a の値), ガウス過程の変化を調べてみよ (試験範囲外).

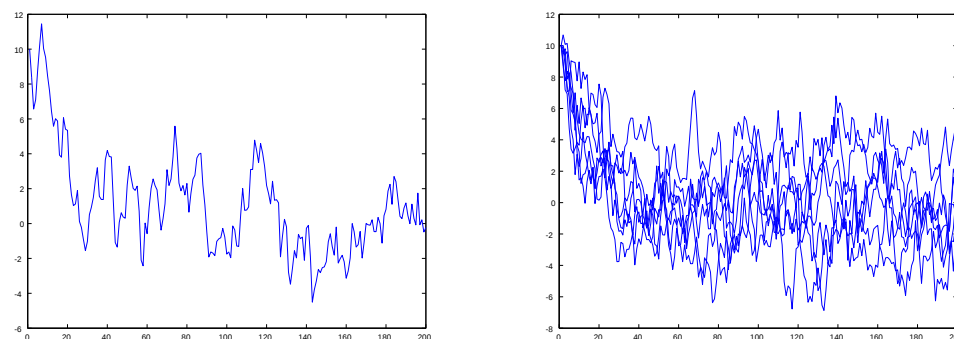


図 1: ガウス過程 ($a=0.9, b=1.0$) のサンプルパス. 左図: 一本のパス, 右図: 多数のパス.