36. １次元単純ランダムウォークを考える．すなわち, 時間に依存する確率変数 X_n が $X_n = X_{n-1}+W_n$, $X_0 = a$ なる規則によって生成されている．ここで, W_1, W_2, ... は互いに独立で, 時刻によらず次の分布に従う．

$$\mathbf{P}(\{W_n = +1\}) = p, \quad \mathbf{P}(\{W_n = -1\}) = q = 1 - p$$

ここで, さらに $k = M$, $k = 0$ $(0 < a < M)$ の地点に吸収壁 (その点に到達すると, 以後, 動点 X_n が変化しなくなる) があるとする「破産問題」を考える．時刻 n において $X_n = k$ となる確率を $\pi_n(k)$ と表すとき, $\pi_n(k)$ が満たす漸化式を, 境界条件も含めて求めよ．

37. 上記の破産問題において, $M = 2$ の場合を考察する．確率ベクトル $\vec{\pi}_n = (\pi_n(2), \pi_n(1), \pi_n(0))^T$ が満たす行列漸化式を求め, $\vec{\pi}_n$ の一般解を求めよ．

38. 上記の破産問題において, $M = 3$ の場合を考察する．初期値は $X_0 = 2$ であるとする (すなわち, $\pi_0(2) = 1$). 確率ベクトル $\vec{\pi}_n = (\pi_n(3), \pi_n(2), \pi_n(1), \pi_n(0))^T$ が満たす行列漸化式を求め, $\vec{\pi}_7$ まで計算してみよ．そして, それを基に一般解 $\vec{\pi}_n$ を類推し, 極限 $\lim_{n\to\infty} \vec{\pi}_n$ を求めよ．

39. 単純ランダムウォークにおいて, さらに $k = 0$ の地点に「反射壁」がある場合を考える． すなわち, $X_{n-1} = 0$ であるとき, 次の時刻で必ず $X_n = 1$ となる状況を考える．時刻 n において $X_n = k$ となる確率を $\pi_n(k)$ と表すとき,

$$\pi_n(k) = p\pi_{n-1}(k-1) + q\pi_{n-1}(k+1), \quad \pi_n(1) = \pi_{n-1}(0) + q\pi_{n-1}(2), \quad \pi_n(0) = q\pi_{n-1}(1)$$

である (問 35). この確率過程の定常分布を求めたい．そこで定常分布が存在するものとして, 十分大きな n に対して $\pi_n(k) = \pi_{n+1}(k)$ を仮定し, これを $\pi(k)$ と表す．このとき, k に関する漸化式

$$\pi(k) = p\pi(k-1) + q\pi(k+1), \quad \pi(1) = \pi(0) + q\pi(2), \quad \pi(0) = q\pi(1)$$

を解け．また, このような定常分布が存在するための条件を求めよ．

40. 全ての成分が 1 であるベクトル $e = (1, 1, \ldots, 1)^T$ を考える．ただし, ここでは単純のため事象数が有限であるものを考えている．

(1) 一般の確率ベクトルの遷移則 $\vec{\pi}_n = T\vec{\pi}_{n-1}$ について, 遷移行列 T は $e^T T = e^T$ を満たす必要がある．これは確率論的に何を意味するか．

(2) 遷移行列 T の性質 $e^T T = e^T$ から, T は固有値 1 をもつ．従って, $T\vec{x} = \vec{x}$ を満たす x が存在する．他方, 確率ベクトルの定常分布 $\vec{\pi}_\infty$ は, 定義より $T\vec{\pi}_\infty = \vec{\pi}_\infty$ を満たす．このことから, 一般に $\vec{\pi}_n \to \vec{\pi}_\infty = \vec{x}$ であると言えるか？上記の問題 37, 38 の場合について, とくに考察してみよ．