応用確率論 - 問題集 (第 7 回)

31. １次元単純ランダムウォークを考える．すなわち，時間に依存する確率変数 X_n が $X_n = X_{n-1}+W_n$, $X_0 = 0$ なる規則によって生成されている．ここで，W_1, W_2, ... は互いに独立で，時刻によらず次の分布に従う．

$$\mathbf{P}(\{W_n = +1\}) = p, \quad \mathbf{P}(\{W_n = -1\}) = q = 1 - p$$

上記の，確率変数 X_n が従う時間変化則は厳密に解けて，$X_n = \sum_{k=1}^{n} W_k$ で解が与えられる．これを利用して，X_n の平均 $\mathbf{E}_{X_n}(X_n)$, 分散 $\mathbf{V}_{X_n}(X_n)$ を計算せよ．

32. 上記の単純ランダムウォークを考える． 厳密解 $X_n = \sum_{k=1}^{n} W_k$ を用いて，共分散 $\mathrm{Cov}(X_n, X_m) = \mathbf{E}_{X_n,X_m}(X_n X_m) - \mathbf{E}_{X_n}(X_n)\mathbf{E}_{X_m}(X_m)$ および相関係数 (問題 23 参照) を計算し，X_n と X_m の関連を調べよ．

33. 上記の単純ランダムウォークを考える．確率変数 X_n についての完全な情報は，時刻 n において $X_n = k$ となる確率 $\mathbf{P}(\{X_n = k\})$ で与えられる．そして，厳密解が $X_n = \sum_{k=1}^{n} W_k$ で与えられることから，X_n の実現値は，n ステップ中，何回 $W_k = +1$ なる事象が起きたかで決まる．このことから，$\mathbf{P}(\{X_n = k\})$ を求めよ．また，時刻 $n = 3$ における分布を定めよ．

34. 上記の単純ランダムウォークを考える．時刻 n において，$X_n = k$ となる確率を $\pi_n(k)$ と表す．いま，$k = M > 0$ の地点に「吸収壁」があり，この点に到達すると，以降の時刻で X_n は変化しないものとする．このとき，$\pi_n(k)$ が従うダイナミクスが次で与えられることを証明せよ．

$$\pi_n(k) = p\pi_{n-1}(k-1) + q\pi_{n-1}(k+1), \quad (k \leq M-2)$$
$$\pi_n(M) = p\pi_{n-1}(M-1) + \pi_{n-1}(M), \quad \pi_n(M-1) = p\pi_{n-1}(M-2), \quad \pi_0(0) = 1$$

これをもとに，$M = 2$ であるときの X_3 の分布を計算せよ．

35. 上記の単純ランダムウォークにおいて，$k = 0$ の地点に「反射壁」がある場合を考える．すなわち，$X_{n-1} = 0$ であるとき，次の時刻で必ず $X_n = 1$ となる状況を考える．時刻 n において $X_n = k$ となる確率を $\pi_n(k)$ と表すとき，

$$\pi_n(k) = p\pi_{n-1}(k-1) + q\pi_{n-1}(k+1), \quad (k \geq 2),$$
$$\pi_n(1) = \pi_{n-1}(0) + q\pi_{n-1}(2), \quad \pi_n(0) = q\pi_{n-1}(1), \quad \pi_0(1) = 1$$

を証明せよ．ただし，初期値は $X_0 = 1$ と変更している．また，これを用いて $\pi_3(1)$ を計算せよ．