

応用確率論 - 問題集 (第6回)

26. 確率変数 X, Y, Z が独立であるとする. このとき, $W = X + Y$ と Z も独立であることを, 離散確率分布の場合に証明せよ.

27. 連続確率変数 X, Y が独立で, それぞれ確率密度関数 $f(x), g(y)$ に従うとする. このとき, 変数 $Z = X + Y$ が従う確率密度関数が次式で与えられることを示せ (たたみこみ).

$$p(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f(z-x)g(x)dx$$

28. X と Y は独立な確率変数で, それぞれ正規分布 $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$ に従うものとする. すなわち, それぞれの確率密度関数が

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right), \quad g(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{y^2}{2\sigma^2}\right)$$

で与えられる. このとき, $Z = X + Y$ も正規分布に従うことを示せ. また, 一般に独立な確率変数 X, Y がそれぞれ正規分布 $\mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1^2), \mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2^2)$ に従うとき, $Z = X + Y$ は正規分布 $\mathcal{N}(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$ に従うことを示せ.

29. X と Y は独立な確率変数で, それぞれパラメータ λ の指数分布に従うものとする. すなわち, それぞれの確率密度関数が

$$f(x) = \frac{1}{\lambda} e^{-x/\lambda}, \quad g(y) = \frac{1}{\lambda} e^{-y/\lambda}$$

で与えられる. このとき, $Z = X + Y$ は指数分布に従わないことを示せ. (いかなる確率分布に従うか?)

30. 連続確率変数 X と Y が次の形の同時確率密度関数に従うものとする.

$$f(x, y) = K \exp\left[-a(x - \mu_1)^2 + 2b(x - \mu_1)(y - \mu_2) - c(y - \mu_2)^2\right]$$

ただし $K > 0$ は全確率の和が1すなわち $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx dy = 1$ であるように決定される (規格化定数). このような分布は, 「2次元正規分布」と呼ばれる.

- (1) 共分散 $\text{Cov}(X, Y) = \mathbf{E}_{XY}(XY) - \mathbf{E}_X(X)\mathbf{E}_Y(Y)$ を計算し, 2次元正規分布においては, 無相関と独立性が等価であることを示せ. (一般には, 独立であれば無相関であるがその逆は成立しない.)
- (2) X, Y の適当な線形変換 $X' = \alpha X + \beta Y, Y' = \gamma X + \delta Y$ を行うことによって, X' と Y' を独立に出来ることを示せ (アドバンス).