21. 株価 X は確率 1/2 で 4 倍, 確率 1/2 でゼロに変動する. 一方, 株価 Y は確率 1/2 で 2 倍, 確率 1/2 で半分に変動する. そして, 確率変数 X, Y が次の同時確率分布に従うとする ($a > 0, b > 0$ は投資額を表す).

$$\mathbf{P}(\{X = 4a,\ Y = 2b\}) = 1/6, \quad \mathbf{P}(\{X = 0,\ Y = 2b\}) = 2/6,$$

$$\mathbf{P}(\{X = 4a,\ Y = \frac{b}{2}\}) = 2/6, \quad \mathbf{P}(\{X = 0,\ Y = \frac{b}{2}\}) = 1/6$$

(1) X のみに注目したときの平均と分散, および Y のみに注目したときの平均と分散を求めよ.

(2) 全体系の変数 $Z = X + Y$ が従う確率分布を求め, 平均 $\mathbf{E}_Z(Z)$ を求めよ. これより, $\mathbf{E}_Z(Z) = \mathbf{E}_{XY}(X) + \mathbf{E}_{XY}(Y) = \mathbf{E}_X(X) + \mathbf{E}_Y(Y)$ を確認せよ.

(3) 共分散 $\mathrm{Cov}(X, Y) = \mathbf{E}_{XY}(XY) - \mathbf{E}_X(X)\mathbf{E}_Y(Y)$ を計算し, X と Y の関連を調べよ.

(4) 1 億円の資金を X, Y に分散投資する. すなわち, $a = t,\ b = 1 - t\ (0 \le t \le 1)$ とする. 獲得額の分散 (リスク) が最少となる配分額 t を決定せよ.

22. 確率変数 X は確率 1/2 で値 x_1 を, 確率 1/2 で値 x_2 をとる. また, 確率変数 Y は確率 1/2 で値 y_1 を, 確率 1/2 で値 y_2 をとる. そして, これらの確率変数 X, Y が次の同時確率分布に従うとする.

$$\mathbf{P}(\{X = x_1,\ Y = y_1\}) = 1/6, \quad \mathbf{P}(\{X = x_2,\ Y = y_1\}) = 2/6,$$

$$\mathbf{P}(\{X = x_1,\ Y = y_2) = 2/6, \quad \mathbf{P}(\{X = x_2,\ Y = y_2) = 1/6$$

共分散 $\mathrm{Cov}(X, Y) = \mathbf{E}_{XY}(XY) - \mathbf{E}_X(X)\mathbf{E}_Y(Y)$ を計算し, X と Y の関連を調べよ. どのような状況で, X と Y が無相関となるか.

23. 共分散 $\mathrm{Cov}(X, Y) = \mathbf{E}_{XY}(XY) - \mathbf{E}_X(X)\mathbf{E}_Y(Y)$ は, 一般に $\mathrm{Cov}(X, Y) = \mathbf{E}_{XY}\big[(X - \bar{X})(Y - \bar{Y})\big]$ と式変形できることを証明せよ. ただし, $\bar{X} = \mathbf{E}_X(X),\ \bar{Y} = \mathbf{E}_Y(Y)$ である. さらに,「相関係数」

$$\rho(X, Y) := \frac{\mathrm{Cov}(X, Y)}{\sqrt{\mathbf{V}_X(X)}\sqrt{\mathbf{V}_Y(Y)}}$$

が $-1 \le \rho(X, Y) \le 1$ を満たすことを証明せよ (アドバンス).

24. 離散確率変数 $X,\ Y$ が独立で, それぞれ確率分布 $p_X(x_i),\ p_Y(y_i)$ に従うとする. このとき, 変数 $Z = X + Y$ が従う確率分布が次式で与えられることを示せ (たたみこみ).

$$p_Z(z_k) = \sum_i p_X(z_k - y_i) p_Y(y_i)$$

さらに, そのような $X,\ Y$ がそれぞれパラメータ λ_1, λ_2 のポアソン分布に従うものとする. すなわち

$$Po(X = i, \lambda_1) = \frac{\lambda_1^i}{i!}\mathrm{e}^{-\lambda_1}, \quad Po(Y = j, \lambda_2) = \frac{\lambda_2^j}{j!}\mathrm{e}^{-\lambda_2}$$

である. このとき, $Z = X + Y$ はパラメータ $\lambda_1 + \lambda_2$ のポアソン分布に従うことを示せ.

25. １枚のコインを投げる試行において, 表が出る事象, 裏が出る事象に対応して確率変数 X が $x,\ -x$ をとるとする. すなわち,

$$\mathbf{P}(\{X = x\}) = \frac{1}{2}, \quad \mathbf{P}(\{X = -x\}) = \frac{1}{2}$$

なる分布を考える. この試行を４回行う. 各回ごとの確率変数を $X_1,\ X_2,\ X_3,\ X_4$ と書くとき,

$$S_2 = \frac{X_1 + X_2}{2}, \quad S_3 = \frac{X_1 + X_2 + X_3}{3}, \quad S_4 = \frac{X_1 + X_2 + X_3 + X_4}{4}$$

が従う確率分布を求め, それぞれの平均, 分散を計算せよ. さらに, 一般の場合 $S_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k$ の平均と分散を類推し, その意味を考えよ.