

応用確率論 - 問題集 (第 4 回)

16. 1 つのサイコロを 1 回投げる試行を行う. 以下のように事象族 $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$ を定めるとき, これらの同時確率分布表を求めよ. また, それにより, 2 つの事象族が独立か否か判定せよ.

(1) $\mathcal{F}_1 = \{A_1, A_2\}, \mathcal{F}_2 = \{B_1, B_2\}$ を構成する事象が以下で与えられる:

$$A_1 = \{ \text{出る目が偶数である} \}, \quad A_2 = \{ \text{出る目が奇数である} \}.$$

$$B_1 = \{ \text{出る目が 3 以下である} \}, \quad B_2 = \{ \text{出る目が 4 以上である} \}.$$

(2) $\mathcal{F}_1 = \{A_1, A_2\}, \mathcal{F}_2 = \{B_1, B_2\}$ を構成する事象が以下で与えられる:

$$A_1 = \{ \text{出る目が偶数である} \}, \quad A_2 = \{ \text{出る目が奇数である} \}.$$

$$B_1 = \{ \text{出る目が素数である} \}, \quad B_2 = \{ \text{出る目が素数ではない} \}.$$

17. 1 つのサイコロを続けて 2 回投げる試行を行う. 以下のように事象族 $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$ を定めるとき, これらの同時確率分布表を求めよ. また, それにより, 2 つの事象族が独立か否か判定せよ.

(1) $\mathcal{F}_1 = \{A_1, A_2\}, \mathcal{F}_2 = \{B_1, B_2\}$ を構成する事象が以下で与えられる:

$$A_1 = \{1 \text{ 回目のサイコロの目が偶数} \}, \quad A_2 = \{1 \text{ 回目のサイコロの目が奇数} \}.$$

$$B_1 = \{1 \text{ 回目と 2 回目で同じ目が出る} \}, \quad B_2 = \{1 \text{ 回目と 2 回目で同じ目が出ない} \}.$$

(2) $\mathcal{F}_1 = \{A_1, A_2\}, \mathcal{F}_2 = \{B_1, B_2\}$ を構成する事象が以下で与えられる:

$$A_1 = \{1 \text{ 回目のサイコロの目が偶数} \}, \quad A_2 = \{1 \text{ 回目のサイコロの目が奇数} \}.$$

$$B_1 = \{2 \text{ 回の試行で, 最低 1 回, 1 の目が出る} \}, \quad B_2 = \{2 \text{ 回の試行で, 1 回も 1 の目が出ない} \}.$$

18. サイコロを続けて n 回投げるとき, 6 の約数の目が奇数回出る確率を p_n とする. このとき p_n および $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n$ を求めよ.

19. 点 P が数直線上の整数点 (座標が整数である点) を次の規則にしたがって正の方向に移動していく: ある時点での P の座標が k のとき, 次の時点で P は座標 $k+1$ の点か, または座標 $k+2$ の点のどちらかに, それぞれ確率 $1/2$ で移動する. ただし, 時刻 0 において, P は原点にいるものとする. 正の整数 n に対して, ある時点で P の座標が n となる確率 p_n を求めよ.

20. $\{[x, x + \Delta x)$ に値をとる $\}$, および $\{[y, y + \Delta y)$ に値をとる $\}$ という 2 つの連続型事象について, 次の同時確率密度関数が与えられているとする.

$$f(x, y) = K \exp \left[-a(x - \mu_1)^2 + 2b(x - \mu_1)(y - \mu_2) - c(y - \mu_2)^2 \right]$$

ただし $K > 0$ は全確率の和が 1 すなわち $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx dy = 1$ であるように決定される (規格化定数). このような分布は, 「2 次元正規分布」と呼ばれる.

(1) 確率密度関数が正しく定義されるための a, b, c についての条件を求めよ. すなわち, $x \rightarrow \infty, y \rightarrow \infty$ としたとき, $f(x, y)$ が発散しないための条件を求めよ.

(2) 2 つの周辺分布がいずれも正規分布に従うことを示せ.