

応用確率論 - 問題集 (第 3 回)

11. 赤玉 6 個, 青玉 3 個, 黄玉 1 個が入っている壺から玉を一つ取り出し, 色に応じて金額が得られるゲームを行う.

- (1) 赤, 青, 黄に対してそれぞれ 10 円, 100 円, 1000 円が得られる場合の平均値と標準偏差を求めよ.
- (2) 赤, 青, 黄に対してそれぞれ 120 円, 150 円, 190 円が得られる場合の平均値と標準偏差を求めよ.

12. (1) ポアソン分布

$$Po(k, \lambda) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

に従う確率変数 k の分散を求めよ. [ヒント] 恒等式 $e^t = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!}$ を変数 t についての等式とみて, 両辺を t で 2 回, 微分してみよう.

(2) 2 項分布

$$p_k = {}_N C_k p^k (1-p)^{N-k}$$

に従う確率変数 k の分散を求めよ. [ヒント] 恒等式 (2 項展開) $(pt + q)^N = \sum_{k=0}^N {}_N C_k (pt)^k q^{N-k}$ を変数 t についての等式とみて, 両辺を t で 2 回, 微分してみよう. ただし $q = 1 - p$ である.

13. $\lambda > 0$ をパラメータとする指数分布の確率密度関数は, $x \geq 0$ のとき

$$p(x) = \frac{1}{\lambda} e^{-x/\lambda}$$

で与えられ, $x < 0$ のとき $p(x) = 0$ である.

- (1) この指数分布について, 確率変数 X の平均値 $\bar{X} = E(X)$ および分散 $V(X)$ を求めよ.
- (2) 指数分布の場合に次の 2 つの確率を計算し, 平均値が, 必ずしも出やすい値の「中央値」を表しているわけではないことを説明せよ.

$$P(\{X \text{ が } (-\infty, \bar{X}] \text{ に値をとる}\}), \quad P(\{X \text{ が } [\bar{X}, \infty) \text{ に値をとる}\})$$

- (3) 出やすい値の中央値として, つぎの等式を満たす値 M (メジアン) が考えられる.

$$P(\{X \text{ が } [M, \infty) \text{ に値をとる}\}) = \frac{1}{2}$$

指数分布の場合に, メジアン M を求めよ.

14. 正規分布の確率密度関数は

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}(x - \mu)^2\right]$$

で与えられる. 確率変数 x の分散を求めよ. 正規分布の平均・分散は, その概形とどのような関係にあるか. (問題 4, 問題 10 参照.)

15. チェビシェフの不等式

$$P(\{\omega : |X(\omega) - \bar{X}| \geq \epsilon\}) \leq \frac{V(X)}{\epsilon^2}$$

を, 離散分布の場合について証明せよ. ただし, $\bar{X} = E(X)$ である.