

応用確率論 - 問題集 (第 2 回)

6. ある試験を 100 人の学生が受験したところ、採点結果 X が次表のように分布した.

X	10 点	20 点	30 点	40 点	50 点	60 点	70 点	80 点	90 点	100 点
人数	2 人	5 人	7 人	12 人	20 人	25 人	18 人	7 人	3 人	1 人

(1) 変数変換 $Y = f(X) = \min\{3X/2, 100\}$ を行うとき, Y の値に関する確率分布を求めよ. ただし人数比をもって確率とする. また, $\min\{a, b\}$ は, a と b の小さいものを取り出す関数である.

(2) $Y = f(X) = \min\{X + 10, 100\}$ である場合はどうなるか.

7. 確率変数 X は, 標準正規分布 (すなわち, 確率密度関数が $p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}$ であるもの) に従うとする. このとき, 変数 $Y = X^2$ が従う確率分布の確率密度関数 $q(y)$ を求めよ. [ヒント] 定義より,

$$P(\{X \text{ が } [x, x + \Delta x] \text{ に値をとる}\}) = p(x)\Delta x,$$

$$P(\{Y \text{ が } [y, y + \Delta y] \text{ に値をとる}\}) = q(y)\Delta y,$$

である. いま, 第 2 式の左辺が $P(\{X^2 \text{ が } [y, y + \Delta y] \text{ に値をとる}\})$ である. これをさらに進めて, 第 1 式へ結び付けてみる.

8. 赤玉 6 個, 青玉 3 個, 黄玉 1 個が入っている壺から玉を一つ取り出す操作を 10 回繰り返す (つまり, 1 回玉を取り出してからそれを壺に戻し, もう一度玉を取り出す操作を 10 回行う).

(1) 結果が, 赤玉 6 回, 青玉 3 回, 黄玉 1 回となる確率を求めよ.

(2) 結果が, 赤玉 5 回, 青玉 3 回, 黄玉 2 回となる確率を求めよ.

9. (1) ポアソン分布

$$Po(k, \lambda) = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$$

に従う確率変数 k の平均を求めよ.

(2) 2 項分布

$$p_k = {}_N C_k p^k (1-p)^{N-k}$$

に従う確率変数 k の平均を求めよ. [ヒント] 恒等式 (2 項展開)

$$(pt + q)^N = \sum_{k=0}^N {}_N C_k (pt)^k q^{N-k}$$

を変数 t についての等式とみて, 両辺を t で微分してみよう. ただし $q = 1 - p$ である.

10. 確率密度関数が

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}(x - \mu)^2\right]$$

で与えられる正規分布について, 確率変数 x の平均を求めよ.