

56. 未知数 x に関する n 回目の測定値が, 確率変数 $Y_n = cx + V_n$ で与えられている. ここで V_n は平均 0, 分散 1 の標準正規分布 $\mathcal{N}(0, 1)$ に従う独立な確率変数 (ノイズ) であり, c は測定値に含まれる信号の割合を表す定数である (S/N 比). この未知数 x を確率変数 X とみなしベイズ法によって推定し, さらに測定を行なう毎に推定値を更新することを考える. とくに $n = 0$ において X が正規分布に従うとすれば, 更新される分布はつねに正規分布となる. そこで, n 回目の測定値 y_n のもとで X が平均 μ_n , 分散 τ_n の正規分布 $\mathcal{N}(\mu_n, \tau_n)$ に従うとすれば, この分布の更新則は次式で与えられる.

$$\mu_n = \mu_{n-1} + \frac{c\tau_{n-1}}{1 + c^2\tau_{n-1}}(y_n - c\mu_{n-1}), \quad \tau_n = \frac{\tau_{n-1}}{1 + c^2\tau_{n-1}}$$

μ_n が x の推定値であり, τ_n はそのばらつき具合を表す. μ_n は測定値の関数であるから, 確率変数である. その平均値 $\bar{\mu}_n = \mathbf{E}(\mu_n)$ が従う漸化式を求め, 一般解を求めよ. (ヒント: τ_n は確定的に決定されるので確率変数ではない. x も未知ではあるが確定値をとる.) 推定値の平均値がつねに真値と一致 ($\mathbf{E}(\mu_n) = x$) するための条件を求めよ (このとき, μ_n は「不偏推定量」と呼ばれる). さらに, 推定誤差 $\delta_n = \mathbf{E}[(x - \mu_n)^2]$ が従う漸化式を求め, 一般解を求めよ.

57. 問題 54 で考察した推定過程のシミュレーションは, MATLAB あるいはその簡易版である Octave で容易に実行できる. そして, そのコードは以下の通りである.

```
c=0.3;
true=1;
x=2;
X=[x];
t=3;
T=[t];
for n=1:2000
    y = c*true + randn(1,1);
    x = x + c*t*(y-c*x)/(1+c*c*t);
    t = t/(1+c*c*t);
    X=[X,x];
    T=[T,t];
end
plot(X)
hold on
plot(T,'r')
hold on
plot(true*ones(1,n),'--')
```

各行の意味を考え, 実行してみよ. 良い推定を行うために, パラメータ x , t をどのように設定すべきが考察せよ (試験範囲外).

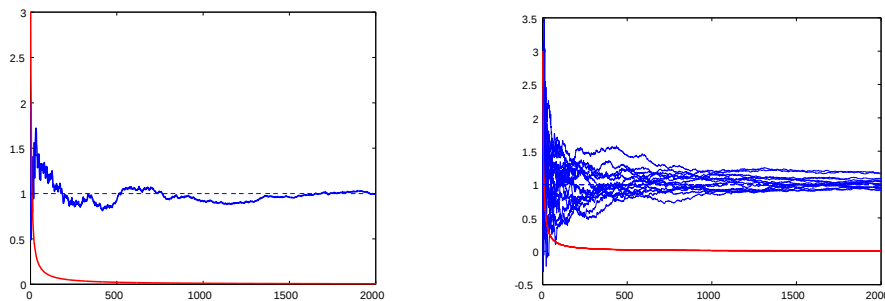


図 1: 推定過程 ($c=0.3$, $x=2$, $t=3$) のサンプルパス. 左図: 一本のパス, 右図: 多数のパス.