

51. 奇数の目の部分に黒いシールが、偶数の目の部分に白いシールが貼られているサイコロを 1 つ投げる試行を考える. 試行前の目に関する確率分布 (事前分布) は、当然、 $i = 1, \dots, 6$ に対して $P(\{i\}) = 1/6$ である. このサイコロを投げて「黒」が出たとき、サイコロの目に関する確率分布 (事後分布) を求めよ.

52. 閉じた箱の中に 2 つの壺 H_1, H_2 が入っている. 壺 H_1 には赤玉 3 個、白玉 1 個が入っており、壺 H_2 には赤玉 2 個、白玉 2 個が入っている. これら 2 つの壺を区別したい. 何の情報も得られていない状況では、一方が H_1 である確率は 50% であり、当然、他方が確率 50% で H_2 と判断される. いま、この箱に手を差し入れ、いずれかの壺から玉を 1 つ取り出す. 取り出した玉が赤玉であったとき、壺を区別する判断を与える確率はどのように変化するか. (赤玉を取り出したという事象のもとで、それが壺 H_1 から取り出されている条件付き確率を計算すればよい.) さらに、1 つの壺から 2 つの玉を取り出すことが許されている場合で取り出された玉が 2 つとも赤玉であったとき、この確率の変化を計算せよ.

53. ある海域に難破船が沈没している. この船を引き揚げるために、以下のような方策をとる. まず、その海域をグリッドに分割し、各グリッドに船が沈んでいる確率を適当に割り振る. 次に、実際に一つのグリッドにおいて船の搜索を行い、もし船が見つからなかったら、そのグリッドに船が沈んでいる確率を更新し、同時に、他のグリッドに船が沈んでいる確率を (全確率の和が 1 であるように) 均等に变化させる. この確率の更新則を決定したい. あるグリッドに注目し、

$$A = \{ \text{そのグリッドに船が沈んでいる} \}, \quad B = \{ \text{そのグリッドにおける搜索の結果、船が発見される} \}$$

なる 2 つの事象を考える. そして、これらに対して $p = P(A), q = P(B | A)$ が定まっている. このとき、上述の確率の更新則を決定せよ. (条件付き確率 $P(A | B^c)$ を計算すればよい. ただし、 B^c は「そのグリッドにおける搜索の結果、船が発見されない」なる余事象である.)

54. Eメールの適切な管理のために、迷惑メールとそうでないものを区別するフィルターが必要である. 「ベイジアンフィルター」とは、メールに特定の文字列が含まれているときに機能し、一定の確率で、そのメールを迷惑メールと判断するフィルターである. いま、

$$A = \{ \text{対象としているメールが迷惑メールである} \}$$

$$B = \{ \text{対象としているメールが「無料」なる文字を含んでいる} \}$$

なる 2 つの事象を考える. そして、これらに対して次のように確率が定まっているものとする.

$$P(B | A) = \frac{1}{2}, \quad P(B | A^c) = \frac{1}{100}, \quad \frac{P(A^c)}{P(A)} = 2$$

ただし、 c は余事象を表す. このとき、フィルターの有効確率 $P(A | B)$ を計算せよ. さらに、このフィルターが、「無料」の文字を含んでいないメールを迷惑メールと判断する確率 $P(A | B^c)$ を求めよ.

55. 1次元ランダムウォークを考える. すなわち、時間に依存する確率変数 X_n が $X_n = X_{n-1} + W_n$, $X_0 = 0$ なる規則によって生成されている. ここで、 $W_1, W_2, \dots$ は互いに独立で、時刻によらず次の分布に従う.

$$P(\{W_n = +1\}) = p, \quad P(\{W_n = -1\}) = q = 1 - p$$

時刻 $n = 3$ において $X_3 = k$ となる確率 $\pi_3(k)$ は、 $\pi_3(3) = p^3$, $\pi_3(1) = 3p^2q$, $\pi_3(-1) = 3pq^2$, $\pi_3(-3) = q^3$ である. いま、同時刻において対象の位置を測定した結果、 $X_3 > 0$ であると判明した. この情報のもとでの X_3 の分布を求め、不確かさの減少の度合いを計算せよ.