

応用確率論 - 問題集 (第 10 回)

46. 離散時間定常過程 X_n に対する自己相関関数 $R_k = E(X_n X_{n+k})$ の離散時間フーリエ変換 (パワースペクトル):

$$S(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} R_k e^{-i\omega k} \quad (-\pi \leq \omega \leq \pi) \quad (1)$$

を考える. 逆フーリエ変換が

$$R_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} S(\omega) e^{i\omega k} d\omega \quad (2)$$

で与えられることを示せ.

47. 上記の問題で与えた自己相関関数とパワースペクトルがいずれも偶関数:

$$R_k = R_{-k}, \quad S(\omega) = S(-\omega)$$

であることを示せ.

48. 1次元離散時間ガウス過程を考える. すなわち, 時間に依存する確率変数 X_n が $X_n = aX_{n-1} + bW_n$ なる規則によって生成されている (ただし $-1 < a < 1$ とする). ここで, $W_1, W_2, \dots$ は互いに独立で, 時刻によらず (平均 0, 分散 1 の) 標準正規分布 $\mathcal{N}(0, 1)$ に従う. この確率過程の自己相関関数 $R_k = E(X_n X_{n+k})$ は, $n \gg 1$ であるとき (つまり, 長時間たったあとの振る舞いを考察している),

$$R_k = \frac{b^2 a^k}{1 - a^2}, \quad R_{-k} = R_k \quad (k \geq 0)$$

で与えられる. (1) 式で定義されるパワースペクトル $S(\omega)$ を計算せよ. また, 得られたパワースペクトル $S(\omega)$ の概形を条件 $-1 < a \leq 0$ のもとで図示し, その意味を考えよ.

49. パワースペクトル $S(\omega)$ が次式で与えられる理想低域通過ノイズを考える (すなわち, 全周波数領域ではなく, ある一定範囲の低周波数を含むノイズを考える).

$$S(\omega) = \begin{cases} 1 & (-\lambda \leq \omega \leq \lambda) \\ 0 & (-\pi \leq \omega \leq -\lambda, \lambda \leq \omega \leq \pi) \end{cases}$$

ただし, $0 < \lambda < \pi$ は定数である. 対応する自己相関関数 R_k を逆フーリエ変換の公式 (2) を用いて求め, その概形を図示せよ.

50. 互いに独立で, 時刻によらず (平均 0, 分散 1 の) 標準正規分布 $\mathcal{N}(0, 1)$ に従う正規ノイズ $W_1, W_2, \dots$ を考え, これを離散時間確率過程とみなす: $X_n = W_n$. (すなわち, 問 48 のガウス過程で $a = 0$ としたもの考える.) このとき, X_n の自己相関関数 R_k およびパワースペクトル $S(\omega)$ を求め, その意味を考えよ.