

応用確率論 - 問題集 (第 1 回)

1. 赤玉 7 個, 白玉 3 個が入っている壺から, 玉を「2 回」取り出す (つまり, 1 回玉を取り出してから, それを壺に「戻し」, もう一度玉を取り出す) を考える.

- (1) 標本空間 Ω を定めよ.
- (2) 「玉の色の組み合わせ」に興味がある場合の事象の族 $\mathcal{F}'_1$ を定め, 確率分布を求めよ.
- (3) 「白玉が出る or 出ない」に興味がある場合の事象の族 $\mathcal{F}'_2$ を定め, 確率分布を求めよ.

2. 赤玉 7 個, 白玉 3 個が入っている壺から, 玉を「2 個」取り出す (つまり, 1 回玉を取り出してから, それを壺に「戻さないで」, もう一度玉を取り出す) を考える.

- (1) 標本空間 Ω を定めよ.
- (2) 「玉の色の組み合わせ」に興味がある場合の事象の族 $\mathcal{F}'_1$ を定め, 確率分布を求めよ.
- (3) 「白玉が出る or 出ない」に興味がある場合の事象の族 $\mathcal{F}'_2$ を定め, 確率分布を求めよ.

3. 成功確率 p であるベルヌイ試行を N 回繰り返すと, 成功回数は

$$p_k = \mathbf{P}(\{N \text{ 回中, } k \text{ 回成功}\}) = {}_N C_k p^k (1-p)^{N-k}$$

なる 2 項分布に従う.

- (1) 成功確率が非常に低い場合, 成功には多数回の試行が必要である. $p = 0.01, N = 500$ のとき, 5 回成功する確率 p_5 を計算せよ.
- (2) 前設問の極端な場合は, $p \rightarrow 0, N \rightarrow \infty$ なる極限で捉えられる. $pN = \lambda$ を定数とすると, 2 項分布の極限

$$Po(k, \lambda) := \lim_{N \rightarrow \infty} {}_N C_k \left(\frac{\lambda}{N}\right)^k \left(1 - \frac{\lambda}{N}\right)^{N-k}$$

を求めよ. これは「ポアソン分布」と呼ばれる確率分布である.

- (3) ポアソン分布において, $Po(k, 1)$ と $Po(k, 5)$ を比較せよ. 確率が最大となる成功回数 k はいくつであるか. また, 設問 (1) で計算した p_5 と $Po(5, 5)$ を比較し, ポアソン分布の近似の良さを評価せよ.

4. 正規分布の確率密度関数は

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2\right]$$

で与えられる ($\sigma > 0$ および μ はパラメータである).

- (1) 関数 $p(x)$ の概形を求めよ. 極大点, 変曲点はどこか.
- (2) 規格化条件 $\int_{-\infty}^{+\infty} p(x) dx = 1$ を確認せよ ($\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx$ の計算を思い出そう).

5. 確率密度関数が

$$p(x) = \frac{C}{1+x^2}$$

であるものを「コーシー分布」と呼ぶ.

- (1) 規格化条件から, 定数 C を求めよ.
- (2) $\mathbf{P}([0, 1]) = \mathbf{P}(\{\text{区間 } [0, 1] \text{ に値をとる}\})$ を計算せよ.